UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dual complementar de Newton

Rodrigo Santana dos Santos
Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão, 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dual complementar de Newton

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Rodrigo Santana dos Santos
Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão, 2019.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos, Rodrigo Santana dos
S237d Dual complementar de Newton / Rodrigo Santana dos Santos ; orientador André Vinicius Santos Dória. - São Cristóvão, 2019.
59 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Geometria algébrica. 3. Álgebra. I. Dória, André Vinicius Santos orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dual complementar de Newton

por

Rodrigo Santana dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:

André V. S. Dória

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Orientador

Zaqueu Alves Ramos

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Ricardo Burity Croccia Macedo

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 27 de Fevereiro de 2019

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Aos meus avós, meus heróis.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por tudo que me condeceu. A caminhada até aqui não foi fácil, mas Ele não deixou que eu fraquejasse me dando forças para vencer todas as dificuldades encontradas. Aos meus avós, Odete Santana dos Santos e Cicero dos Santos, presente maior que Deus me deu. Sempre me deram forças para continuar e não desistir dos meus sonhos, independente do que fosse. Se hoje estou aqui é graças a eles. A toda minha família pelos conselhos, apoio, por sempre acreditarem em mim e a FAPITEC/SE pelo apoio financeiro.

A todos os professores da graduação e do mestrado, mas, em especial, a quatro professores: o Prof. Dr. Marcelo Fernandes, pois através dele iniciei os estudos em álgebra, o Prof. Dr. Zaqueu Ramos, por todo apoio, aprendizado e confiança, o Prof. Dr. Danilo Dias, o qual me aceitou como seu orientando na graduação. Juntos trabalhamos em duas iniciações científicas e no TCC. Esse professor acreditou muito em mim, mesmo sabendo das minhas dificuldades. Aprendi muito com sua forma tranquila de transmitir o que sabia e graças a seu incentivo é que ingressei no mestrado. Mesmo não podendo me orientar no mestrado, por questões de estudo, sou muito grato a ele, pois me apoiou bastante no decorrer do mestrado, e ao Prof. Dr. André Vinícius, que mesmo me conhecendo pouco, aceitou ser meu orientador no mestrado. No início fiquei preocupado com a mudança de área, mas ao longo das reuniões acabei gostando da sua linha de pesquisa, nova pra mim, mas bastante curiosa. Quanto mais estudava a teoria, mais vontade tinha em querer descobrir os próximos resultados. Agradeço por toda disponibilidade, paciência e aprendizado compartilhado com muito profissionalismo e objetividade, apesar das minhas dificuldades. Jamais esquecerei desse trabalho e do curso de Estruturas Algébricas, os quais aprendi muito contigo.

Aos meus professores de Matemática: Tia Sônia (nas séries iniciais), Tia Marli (*in memoriam* - reforço escolar), Jaidê e Elisabete (ensino fundamental), Suiane, Roberta e Amazilde (ensino médio). Professores que fizeram que eu gostasse da matemática, e mais ainda, quisesse ser um professor de Matemática.

A todos meus amigos da graduação e a todos do mestrado: André Dosea, Alexandre Jesus, Alikson Nascimento, Caroline Lisboa, Danielle Aparecida, Danilo Rezende, Daynara Guimarães, Diego Alves, Maria Elismara, Gabriele Marques, Geivison Ribeiro, Ginaldo de Santana, Igor Chagas, Jucileide Santos, Júnio Teles, Junno Santos, Maxwell Paixão, Verônica Santana e Wendell Barros. Juntos estudamos, evoluímos, debatemos diversos problemas e passamos por diversos desafios também. Obrigado garotos! Sou muito grato a vocês por todo conhecimento compartilhado. Também, em especial, agradeço a Arthur Hamilton e André Michael, amigos que sempre acreditaram em mim e sempre estiveram do meu lado me reerguendo com bons conselhos quando fraquejei.

Enfim, a todos que estiveram na minha caminhada, até aqui, meu MUITO OBRIGADO!

Resumo

Neste trabalho estudaremos o Dual complementar de Newton, uma teoria originada no trabalho de A. Simis e B. Costa, posteriormente simplificada e melhorada no trabalho de A. Doria. Em um primeiro momento, apresentaremos noções preliminares sobre Geometria Algébrica, Aplicações racionais e Álgebra de Rees, no entanto, sob o ponto de vista algébrico. Na sequência discutiremos o tema principal da dissertação: a dualidade de Newton e suas propriedades, as quais foram desenvolvidas tendo implícita uma hipótese muito importante, as *restrições canônicas*. Por fim, estabeleceremos algumas relações entre o ideal de apresentação de uma aplicação racional e seu dual via uma função, que não é um homomorfismo de anéis, como também veremos que o dual de aplicações de Jonquières ainda são aplicações desse tipo.

Palavras-chave: Aplicações racionais. Álgebra de Rees. Dualidade de Newton. Aplicações de Jonquières.

Abstract

In this work we will study Newton complementary dual, a theory originated in the work of A. Simis and B. Costa, later simplified and improved in the work of A. Doria. In a first moment, we will give preliminary notions of Algebraic Geometry, Rational Applications and Rees Algebra, however, under the algebraic view. In the sequence we will discuss the main theme of the dissertation: the duality of Newton and its properties, which were developed having implicit a very important hypothesis, the *canonical restrictions*. Finally, we will establish some relations between the ideal of presentation of a rational application and its dual via a function, which is not a ring homomorphism, but we will also see that the dual applications of Jonquières are still applications of this type.

Keywords: Rational applications. Algebra of Rees. Newton's duality. Jonquières applications.

Sumário

1 Preliminares **1**
- 1.1 Conceitos de Geometria Algébrica 1
- 1.2 Aplicação racional 4
- 1.3 Álgebra de Rees associada a uma Aplicação Racional 8

2 Dual complementar de Newton **14**
- 2.1 Dual Complementar de Newton 14
- 2.2 Propriedades 18

3 Aplicações **34**
- 3.1 Álgebra de Rees 34
- 3.2 The Jonquières 41

Introdução

O objetivo do trabalho é compreender, uma noção recente na matemática, a dualidade de Newton em um conjunto de formas de mesmo grau em um anel de polinômios com n+1 variáveis e, por fim, realizarmos duas aplicações desse dual em gráficos de aplicações racionais e aplicações de Joquières. Nesse intuito, faremos algumas preliminares e conheceremos um pouco mais dessa teoria demonstrando alguns resultados básicos.

Nosso estudo estará fortemente ligado a aplicações $\mathfrak{F}$: $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, definidas por um conjunto $\mathbf{f}$ de formas de mesmo grau $d \geq 1$, cujas formas estarão em um anel de polinômios. A noção Dual complementar de Newton foi introduzida, inicialmente, em [1] para aplicações birracionais definidos por monômios. Em seguida, foi estendida em [5], ainda trabalhando com aplicações birracionais definidos por monômios. Na seção 2 desse artigo, foi iniciada uma breve recapitulação dos mapas birracionais e, na sequência, o conceito da matriz de Newton N($\mathbf{f}$) de um conjunto $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ de formas de mesmo grau no anel de polinômios R $= k[x_0, \ldots, x_n]$. Esta matriz é brevemente descrita como a concatenação de todas as matrizes, cujas colunas são os expoentes dos termos não nulos de cada forma que compõe $\mathbf{f}$. A construção subsequente é o que se chama de matriz dual complementar de Newton $\widehat{N(\mathbf{f})}$ da matriz de Newton N($\mathbf{f}$). Isso, por sua vez, dá origem a um novo conjunto de formas $\widehat{\mathbf{f}}$ no mesmo anel R, chamado o *Dual Complementar de Newton* do conjunto $\mathbf{f}$. Posteriormente, grande parte dos resultados, referentes a teoria do dual, obtidos nesse artigo foram simplificados e generalizados em [6], o qual é o texto base para essa dissertação, mas agora com ênfase em mapas Cremonas (aplicações birracionais de mesma dimensão) definidos por um conjunto qualquer de formas de mesmo grau. Além disso, através dessa nova abordagem, foram analisados o comportamento do dual de Newton em algumas álgebras associativas.

No primeiro capítulo abordaremos algumas noções básicas. Todos esses tópicos serão de grande utilidade para o que virá nos próximos capítulos, pois serão a base para a teoria desenvolvida. Mesmo o primeiro tópico sendo Geometria Algébrica, nosso trabalho estará focado apenas na parte algébrica do que será desenvolvido nesse capítulo.

A noção do complementar de Newton e suas propriedades exploraremos no Capítulo 2. Nele desenvolveremos toda a teoria trabalhada na segunda seção do texto base, mas buscando complementos em outras referências como também alguns questionamentos para uma melhor discussão. Alguns desses resultados básicos estarão se referindo a uma forma qualquer, mas, em seguida, eles serão generalizados para um conjunto de formas de mesmo grau $\mathbf{f}$, o qual terá grande importância, uma vez que as aplicações racionais serão definidas a partir desses conjuntos. Notaremos que a involução recíproca de Magnus, o dual de Newton do mapa identidade de $\mathbb{P}^n$, terá uma importância fundamental para tais propriedades, apesar de ser um exemplo simples nos ajudará a conseguir novas relações. Além disso, abordaremos uma propriedade muito útil: a dualidade que nos garante que ao aplicarmos o dual de Newton pela segunda vez em um conjunto de formas ou em uma aplicação racional retornaremos ao conjunto/aplicação inicial. Essa propriedade será aplicada em diversos resultados dessa teoria. Os principais resultados da seção são a Proposição 2.2.10, o Teorema 2.2.12 e seus corolários.

Por fim, estudaremos duas aplicações do dual de Newton relacionadas a Álgebra de Rees e a aplicações de Jonquières, as quais terão uma forma bem particular e serão definidas através de uma Cremona cujo conjunto de formas que a define estará em $k[x_0, \ldots, x_{n-1}]$. Definiremos uma aplicação entre as álgebras de Rees de um conjunto de formas de mesmo grau e seu dual de Newton, com relação aos seus respectivos ideais de apresentação. Essa aplicação não é um homomorfismo de anéis, mas nos permitirá deduzir mais propriedades da passagem entre as álgebras de Rees de um conjunto de formas de mesmo grau e seu dual. Além disso, veremos que o dual preserva aplicações de Jonquières. Os principais resultados dessa parte são o Teorema 3.1.7, Proposição 3.2.3 e a Proposição 3.2.4.

Capítulo 1

Preliminares

O propósito, deste capítulo, é apresentar alguns conceitos necessários aos principais resultados presentes na dissertação. A teoria aqui trabalhada será muito importante, pois construirá a base para o desenvolvimento da teoria do Dual Complementar de Newton, a qual será relacionada com aplicações racionais e de Jonquières no Capítulo 3. Para isso, apresentaremos algumas definições e resultados relacionados a Geometria Algébrica, aplicações racionais e Álgebra de Rees.

1.1 Conceitos de Geometria Algébrica

Seja R $= k[X_0, \ldots, X_n]$ o anel de polinômios em $n+1$ variáveis sobre um corpo k infinito e algebricamente fechado. Destacamos que, ao longo do texto, uma *forma* será um polinômio homogêneo.

Definição 1.1.1. *Um **conjunto algébrico** em $\mathbb{P}^n$ é um conjunto de zeros de um número finito de formas, ou seja, $\mathcal{V}(U) = \{P \in \mathbb{P}^n : F(P) = 0, \forall\, F \in U\}$, onde $U \subset R$ é um conjunto finito de formas.*

Como um ponto em $\mathbb{P}^n$ possui diversos representantes devemos verificar se a notação F(P) $= 0$ está bem definida. Seja F $\in$ R uma forma de grau d, $(a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1} \backslash (0, \ldots, 0)$ as coordenadas homogêneas do ponto P e $\lambda \in k \setminus \{0\}$ qualquer tal que F$(a_0, \ldots, a_n) = 0$. Notemos que F$(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$. De fato, podemos escrever

$$\mathrm{F} = \sum_{\substack{j=(j_0,\ldots,j_n) \\ e \\ \sum_i j_i = d}} \alpha_j X_0^{j_0} \cdots X_n^{j_n}.$$

Assim, F$(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^dF(a_0, \ldots, a_n) = 0$, ou seja, independe do representante.

Para qualquer conjunto S $\subset \mathbb{P}^n$, o ideal $\mathcal{I}$(S) é gerado pelo conjunto {F $\in$ R : F é uma forma e F(P) $= 0$, $\forall$ P $\in$ S} e o denominamos como o *ideal de S*. Note que $\mathcal{I}$(S) é finitamente gerado, já que é um ideal em R que é um anel Noetheriano.

Definição 1.1.2. *Um ideal $I \subset R$ é chamado de **ideal homogêneo** se dado $F = \sum_{i=0}^{m} F_i \in I$, onde F_i é uma forma de grau i, tem-se também que $F_i \in I$, $\forall\, i \in \{0, \ldots, m\}$.*

Notemos que para qualquer conjunto S $\subset \mathbb{P}^n$, temos que $\mathcal{I}$(S) é um ideal homogêneo. Seja F $\in k[X_0, \ldots, X_n]$ um polinômio qualquer tal que F $\in \mathcal{I}$(S), com S $\subset \mathbb{P}^n$. Escreva F $= \sum_{i=0}^{m}$F$_i$, onde F$_i$ é uma forma de grau i. Seja P $\in$ S. Note que F$(a_0, \ldots, a_n) = 0$ para qualquer escolha das coordenadas homogêneas $(a_0, \ldots, a_n)$ para P. Então, F$_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ para todas coordenadas homogêneas para P. De fato, sendo P $= [a_0 : \ldots : a_n]$, para cada $\lambda \in k\backslash\{0\}$, temos P $= [\lambda a_0 : \lambda a_1 : \ldots : \lambda a_n]$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= F(P) \\ &= F(\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \\ &= \sum_{i=0}^{m} F_i(\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \lambda^i F_i(a_0, a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Portanto, λ é raiz do polinômio $\sum_{i=0}^{m} F_i(a_0, a_1, \ldots, a_n)X^i \in k$[X]. Note que tomamos λ qualquer em k. Assim, esse polinômio só pode ser o nulo, pois possui infinitas raízes. Logo, F$_i(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$, $\forall\, i \in \{0, \ldots, m\}$. Portanto, através dessa discussão e da definição 1.1.2, concluímos que $\mathcal{I}$(S) é um ideal homogêneo.

Definição 1.1.3. *Um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{P}^n$, não vazio, é dito* ***irredutível*** *se não é união de dois conjuntos algébricos propriamente contidos em V, ou seja, sendo V_1 e V_2 conjuntos algébricos, se $V = V_1 \bigcup V_2$ então $V = V_1$ ou $V = V_2$.*

Definição 1.1.4. *Uma* ***variedade projetiva*** *é um conjunto algébrico irredutível em $\mathbb{P}^n$.*

Notemos agora o primeiro resultado que relaciona objetos geométricos com objetos algébricos, os ideais de conjuntos no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$.

Lema 1.1.5. *Sejam S e N dois conjuntos finitos de formas e V, X e W conjuntos algébricos não vazios em $\mathbb{P}^n$.*

(a) Se $S \subset N$ então $\mathcal{V}(N) \subset \mathcal{V}(S)$.

(b) Se $V \subseteq W$ então $\mathcal{I}(W) \subseteq \mathcal{I}(V)$. Assim, se $V = U \bigcup U'$ então $\mathcal{I}(V) \subseteq \mathcal{I}(U)$ e $\mathcal{I}(V) \subseteq \mathcal{I}(U')$, onde U e U′ são conjuntos algébricos não vazios em $\mathbb{P}^n$.

(c) $\mathcal{I}(\mathcal{V}(S)) \supset S$ e $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \supset X$.

(d) $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(S))) = \mathcal{V}(S)$ e $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))) = \mathcal{I}(X)$. Então, como V é um conjunto algébrico, $V = \mathcal{V}(\mathcal{I}(V))$; e se I é um ideal de um conjunto algébrico, $I = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

(e) $V = W \Leftrightarrow \mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(W)$.

Demonstração.

(a) Seja $\mathrm{P} \in \mathcal{V}(\mathrm{N})$. Então, $\mathrm{F(P)} = 0$, para todo $\mathrm{F} \in \mathrm{N} \supset \mathrm{S}$. Então, $\mathrm{F}'(\mathrm{P}) = 0$, para todo $\mathrm{F}' \in \mathrm{S}$. Logo, $\mathrm{P} \in \mathcal{V}(\mathrm{S})$.

(b) Seja $\mathrm{F} \in \mathcal{I}(\mathrm{W})$. Então, $\mathrm{F(P)} = 0$, para todo $\mathrm{P} \in \mathrm{W}$. Como $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{W}$, então $\mathrm{F}(\mathrm{P}') = 0$, para todo $\mathrm{P}' \in \mathrm{V}$. Logo, $\mathrm{F} \in \mathcal{I}(\mathrm{V})$. Agora, se $\mathrm{V} = \mathrm{U} \bigcup \mathrm{U}'$, temos que $\mathrm{U},\mathrm{U}' \subseteq \mathrm{V}$. Assim, concluímos esse item.

(c) $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathrm{X})) \supset \mathrm{X}$: Suponha que $\mathrm{X} \not\subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathrm{X}))$. Então, existe $\mathrm{P} \in \mathrm{X}$ tal que $\mathrm{P} \notin \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathrm{X}))$. Daí, existe $\mathrm{F} \in \mathcal{I}(\mathrm{X})$ tal que F não se anula em P, o que é um absurdo já que todos polinômios de $\mathcal{I}(\mathrm{X})$ se anulam em todos os pontos de X.

$\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S})) \supset \mathrm{S}$: Suponha que $\mathrm{S} \not\subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S}))$. Então, existe $\mathrm{F} \in \mathrm{S}$ tal que $\mathrm{F} \notin \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S}))$. Daí, existe $\mathrm{P} \in \mathcal{V}(\mathrm{S})$ tal que F não se anula em P, o que é um absurdo já que todos polinômios de S se anulam em todos os pontos de $\mathcal{V}(\mathrm{S})$.

Logo, as inclusões seguem.

(d) Mostraremos que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S}))) = \mathcal{V}(\mathrm{S})$ e a outra igualdade seguirá. Pelo item (a) e (c), já temos $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S}))) \subset \mathcal{V}(\mathrm{S})$. Por outro lado, suponha que $\mathcal{V}(\mathrm{S}) \not\subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S})))$. Então, existe $\mathrm{P} \in \mathcal{V}(\mathrm{S})$ tal que $\mathrm{P} \notin \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S})))$. Daí, existe $\mathrm{F} \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathrm{S}))$ tal que F não se anula em P, o que é um aburso, pois $\mathrm{P} \in \mathcal{V}(\mathrm{S})$.

(e) Suponha que $\mathrm{V} = \mathrm{W}$. Então, utilizando o item (b), basta observarmos que

$$\mathrm{V} = \mathrm{W} \Rightarrow \mathrm{V} \subseteq \mathrm{W} \text{ e } \mathrm{W} \subseteq \mathrm{V} \Rightarrow \mathcal{I}(\mathrm{W}) \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{V}) \text{ e } \mathcal{I}(\mathrm{V}) \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{W}) \Rightarrow \mathcal{I}(\mathrm{V}) = \mathcal{I}(\mathrm{W}).$$

Por outro lado, pelo item (d), $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathrm{V})) = \mathrm{V}$ e $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathrm{W})) = \mathrm{W}$. Então, se $\mathcal{I}(\mathrm{V}) = \mathcal{I}(\mathrm{W})$, temos $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathrm{V})) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathrm{W}))$. Logo, $\mathrm{V} = \mathrm{W}$. □

Veremos agora a primeira ponte entre a Geometria Algébrica e a Álgebra Comutativa.

Lema 1.1.6. *Um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{P}^n$ é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(V)$ é um ideal primo.*

Demonstração. Suponha que V é irredutível e sejam f, $g \in \mathrm{R}$ tais que $fg \in \mathcal{I}(\mathrm{V})$. Considere $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}$ e $\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}(g) \cap \mathrm{V}$ os pontos de V em que f e g se anulam, respectivamente. Assim, $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \bigcup \mathrm{V}_2$. De fato, se $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_1 \bigcup \mathrm{V}_2$, temos $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_1 \subset \mathrm{V}$ ou $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_2 \subset \mathrm{V}$. Agora, se $\mathrm{P} \in \mathrm{V}$ então $f(\mathrm{P})g(\mathrm{P}) = (fg)(\mathrm{P}) = 0$, ou seja, $f(\mathrm{P}) = 0$ ou $g(\mathrm{P}) = 0$. Logo, $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_1$ ou $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_2$. Daí, a igualdade segue. Portanto, $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1$ ou $\mathrm{V} = \mathrm{V}_2$, ou seja, $f \in \mathcal{I}(\mathrm{V})$ ou $g \in \mathcal{I}(\mathrm{V})$.

Suponha que $\mathcal{I}(\mathrm{V})$ é um ideal primo e que $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \bigcup \mathrm{V}_2$ é uma união de conjuntos algébricos. Então, pelo item (b) do Lema 1.1.5, $\mathcal{I}(\mathrm{V}) \subset \mathcal{I}(\mathrm{V}_1)$. Se $\mathcal{I}(\mathrm{V}) = \mathcal{I}(\mathrm{V}_1)$, pelo item (e) do lema anterior, $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1$ e temos o desejado. Sendo assim, considere que $\mathcal{I}(\mathrm{V}) \subsetneq \mathcal{I}(\mathrm{V}_1)$ e tome $f \in \mathcal{I}(\mathrm{V}_1) \setminus \mathcal{I}(\mathrm{V})$. Note que para todo $g \in \mathcal{I}(\mathrm{V}_2)$, temos $fg \in \mathcal{I}(\mathrm{V})$. De fato, tome $\mathrm{P} \in \mathrm{V}$ um ponto qualquer. Então, $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_1$ ou $\mathrm{P} \in \mathrm{V}_2$, ou seja, $f(\mathrm{P}) = 0$ ou $g(\mathrm{P}) = 0$. Logo, a afirmação segue. Como $\mathcal{I}(\mathrm{V})$ é um ideal primo, f ou g pertence a $\mathcal{I}(\mathrm{V})$ e, uma vez que $f \notin \mathcal{I}(\mathrm{V})$, temos $g \in \mathcal{I}(\mathrm{V})$, ou seja, $\mathcal{I}(\mathrm{V}_2) \subset \mathcal{I}(\mathrm{V})$, já que todos seus elementos estão em $\mathcal{I}(\mathrm{V})$. Assim, $\mathcal{I}(\mathrm{V}_2) = \mathcal{I}(\mathrm{V})$ e, pelo item (e) do Lema 1.1.5, $\mathrm{V} = \mathrm{V}_2$. □

Exemplo 1.1.7. *Uma família de variedades são os hiperplanos, os quais são definidos como conjuntos de zeros de polinômios de grau 1 em R. Um exemplo deles é* $H = \{x_n = 0\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$*, o qual exploraremos mais à frente.*

Definição 1.1.8. *Sendo V uma variedade projetiva não vazia em* $\mathbb{P}^n$*, o anel quociente* $A(\mathrm{V}) = k[X_0, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(\mathrm{V})$ *é chamado o* ***anel de coordenadas homogêneas de V****.*

Assim, diante do que discutimos no Lema 1.1.6 temos que $A(\mathrm{V})$ é um domínio.

1.2 Aplicação racional

O objetivo desta seção é expor conceitos relacionados a conjuntos de formas de mesmo grau como também apresentar alguns conceitos a respeito das aplicações racionais sob o ponto de vista da Álgebra Comutativa, já que existe outra maneira de estudarmos tais aplicações no contexto da Geometria Algébrica, como também conhecer as aplicações racionais denominadas *Cremonas*, as quais serão fundamentais no decorrer deste trabalho. Com este intuito, iniciemos nosso estudo apresentando algumas definições e exemplos para a compreensão da teoria em questão.

A partir daqui $\mathrm{R} = k[x_0, \ldots, x_n]$ e escreveremos $\mathbf{x}$ para representar $x_0,\ldots,x_n$. Agora apresentaremos a seguinte definição que será necessária para a compreensão de vários pontos relacionados a aplicações racionais no decorrer do texto.

Definição 1.2.1. *Sejam* $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$*,* $\mathbf{f}' = \{f'_0, \ldots, f'_m\} \subset R$ *dois conjuntos de formas de mesmo grau* $d, d' \geq 1$*, respectivamente. Dizemos* $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{f}'$ *são* ***equivalentes*** *se*

$$I_2 \begin{bmatrix} f_0 & \cdots & f_m \\ f'_0 & \cdots & f'_m \end{bmatrix} = 0,$$

onde $I_2(M)$ *denota o ideal de R gerado pelos menores* 2×2 *da matriz M.*

Observação 1.2.2. A definição acima é equivalente a dizermos que existem elementos homogêneos não nulos $\mathrm{F}, F' \in \mathrm{R}$ tais que $\mathrm{F}f'_j = F'f_j$, para todo $j = 0, \ldots, m$. De fato, suponha que existem F, F′ elementos homogêneos não nulos em R tais que $\mathrm{F}f'_l = \mathrm{F}'f_l$, para todo $l \in \{0, \ldots, m\}$. Assim, $f_l = (\mathrm{F}/F')f'_l$, para todo l. Logo,

$$det \begin{bmatrix} f_i & f_j \\ f'_i & f'_j \end{bmatrix} = f_if'_j - f'_if_j = (F/F')f'_if'_j - (F/F')f'_jf'_i = 0,$$

para todo $0 \leq i < j \leq m$.

Por outro lado, suponha que $\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}'$ são equivalentes e fixe i, com $i \in \{0, \ldots, m\}$. Então,

$$I_2 \begin{bmatrix} f_0 & \cdots & f_m \\ f'_0 & \cdots & f'_m \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja, $f_if'_j - f'_if_j = 0$, para todo j, com $j \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{i\}$. Assim, temos $f_if'_j = f'_if_j$. Logo, tomando $\mathrm{F} = f'_i$ e $\mathrm{F}' = f_i$, temos o desejado, já que f'_i e f_i são polinômios homogêneos e não nulos. Agora, se j = i não teremos problemas, pois $f_if'_i = f'_if_i$. Portanto, existem elementos homogêneos não nulos satisfazendo o desejado.

A partir desta observação poderemos utilizar qualquer uma das duas noções.

Podemos ter classes de equivalência de conjuntos $\mathbf{f}$ por multiplicação por uma forma arbitrária, como exploraremos a seguir. Claramente, todas essas classes possuirão um único representante, o qual as formas que o compõe não possuem fatores irredutíveis em comum.

Considere $\mathcal{C}$ o conjunto formado por todos os $\mathbf{f} \subset$ R conjuntos de formas de mesmo grau. A Definição 1.2.1 e a Observação 1.2.2 nos permite definir a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{C}$: dados $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\}$ e $\mathbf{f}' = \{f'_0, \dots, f'_m\}$ em $\mathcal{C}$ dizemos que

$$\mathbf{f} \sim \mathbf{f}' \Leftrightarrow (f_0, \dots, f_m) \text{ e } (f'_0, \dots, f'_m) \text{ são equivalentes,}$$

ou seja, se existe F,$F' \in$ R elementos homogêneos regulares tais que $\mathrm{F}f'_j = F'f_j$, para todo $j = 0, \dots, m$.

Note que $\sim$ é uma relação de equivalência:

- **Reflexiva**: $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}$, basta tomar $\mathrm{F} = F' = 1 \in \mathrm{R}$, daí temos $f'_j = 1.f'_j = 1.f_j = f_j$;
- **Simétrica**: basta trocarmos a ordem de escrita;
- **Transitiva**: Se $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}'$ e $\mathbf{f}' \sim \mathbf{f}''$, então existe F,$F'$,$G'$,$G'' \in$ R tais que $F'f_j = \mathrm{F}f'_j$ e $G''f'_j = G'f''_j$. Logo, multiplicando as igualdades, temos $(F'G'')f_j = (\mathrm{F}G')f''_j$, ou seja, $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}''$.

Definição 1.2.3. *Uma **aplicação racional** $\mathfrak{F}$: $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é definida por m+1 formas* $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\} \subset R := k[\mathbf{x}] = k[x_0, \dots, x_n]$ *de mesmo grau $d \geq 1$, nem todas nulas. O conjunto* $\mathbf{f}$ *é denominado **representante** de* $\mathfrak{F}$.

Observação 1.2.4. Frequentemente escreveremos $\mathfrak{F} = (f_0 : \dots : f_m)$ para estar de acordo com a notação projetiva.

Exemplo 1.2.5. O conjunto $\mathbf{v} = \{x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2\}$ define a seguinte aplicação racional

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}\colon \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) \end{aligned}$$

conhecida como o **mapa quadrático de Veronese**. Dizemos que $\mathbf{v}$ define uma aplicação racional do tipo **monomial**, pois as formas que a compõem são monômios.

Exemplo 1.2.6. Seja X $\subset \mathbb{P}^2$ o cubo nodal $f = x_0^3 - x_0^2x_2 + x_1^2x_2$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \{\partial f/\partial x_0, \partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2\} \\ &= \{3x_0^2 - 2x_0x_2, 2x_1x_2, -x_0^2 + x_1^2\}, \end{aligned}$$

um conjunto de formas de grau 2, define uma aplicação racional $\mathfrak{F}$: $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

Definição 1.2.7. *Dados* $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \subset R$, *dizemos que* $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{f}'$ *representam a mesma aplicação racional se, e somente se,*

$$I_2 \begin{bmatrix} f_0 & \cdots & f_m \\ f_0' & \cdots & f_m' \end{bmatrix} = 0,$$

onde $I_t(M)$ *denota o ideal de* R *gerado pelos menores* $t \times t$ *da matriz* M. *Em outras palavras,* $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{f}'$ *representam a mesma* $\mathfrak{F}$, *quando o posto da matriz acima for 1.*

Exemplo 1.2.8. Seja

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\colon \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x:y:z) &\mapsto (xy:xz:yz) \end{aligned}$$

uma aplicação racional. Note que o conjunto de formas $\mathbf{f}' = \{x^2y, x^2z, xyz\}$ também representa a aplicação $\mathfrak{F}$, pois o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} xy & xz & yz \\ x^2y & x^2z & xyz \end{bmatrix}$$

é 1.

O exemplo acima nos mostrou que não é possível termos um único representante para uma determinada aplicação racional, porém conseguiremos dentre eles o “melhor”para representá-la, como veremos na sequência.

Seja $\mathfrak{F} = (f_0 : \ldots : f_m)$ uma aplicação racional. Considere $\lambda = \mathrm{mdc}(f_0, \ldots, f_m)$ e defina $g_i = f_i/\lambda$ para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$. Assim, temos que $\mathrm{mdc}(g_0, \ldots, g_m) = 1$. Seja M a matriz definida por

$$\begin{bmatrix} f_0 & \cdots\cdot & f_m \\ g_0 & \cdots & g_m \end{bmatrix}.$$

Note que posto(M) = 1, ou seja, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ representam $\mathfrak{F}$. Assim, qualquer aplicação racional admite um representante que satisfaz a condição do $\mathrm{mdc}(f_0, \ldots, f_m) = 1$ (isto é, o conjunto de formas não possui parte fixa, ou seja, elas não possuem fator irredutível em comum).

Dados $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ dois representantes de $\mathfrak{F}$ com $\mathrm{mdc}(f_0, \ldots, f_m) = \mathrm{mdc}(g_0, \ldots, g_m) = 1$, onde $\mathrm{gr}(f_i) = d$ e $\mathrm{gr}(g_i) = d'$, para todo i, verificaremos que o grau dessas formas é um invariante. Como $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ representam a mesma aplicação racional, podemos escrever $(f_0, \ldots, f_m) = \lambda(g_0, \ldots, g_m)$, onde $\lambda \in k(\mathbf{x})$, isto é, $\lambda = p/q$ com $p, q \in k[\mathbf{x}]$ e mdc(p,q)=1. Assim, $q(f_0, \ldots, f_m) = p(g_0, \ldots, g_m)$, ou seja, $q|pg_i$. Como mdc(p,q)=1, temos que $q|g_i$ e, portanto, $q|1$ (pela definição de mdc, já que q divide g_i, para todo i, e $\mathrm{mdc}(g_0, \ldots, g_m) = 1$). Analogamente, temos que $p|1$. Logo, $p, q \in k$ (são constantes, ou seja, $\lambda \in k$). Como $f_i = \lambda g_i$, para todo i, com λ constante, isso resulta que $\mathrm{gr}(f_i) = \mathrm{gr}(g_i)$, para todo i. Portanto, o grau é um invariante de $\mathfrak{F}$.

Para ter uma noção bem definida do grau de $\mathfrak{F}$, sempre assumiremos que o $\mathrm{mdc}(f_0, \ldots, f_m) = 1$, isto é, ao longo do trabalho estaremos trabalhando com a mais simples representação das aplicações racionais. Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 1.2.9. *Seja $\mathfrak{F} = (f_0 : \ldots : f_m)$ uma aplicação racional. O **grau** de $\mathfrak{F}$ é o grau comum das f_i, para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$.*

Exemplo 1.2.10.

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}\colon \mathbb{P}^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [x : y : z : w] &\mapsto [qx : qy : y^3 : y^2 z] \end{aligned}$$

é uma aplicação racional de grau 3, onde $q = xz + yw$.

Definição 1.2.11. *Seja $\mathfrak{F} = (f_0 : \ldots : f_m)$ uma aplicação racional. A **imagem** de $\mathfrak{F}$ é a subvariedade projetiva $W \subset \mathbb{P}^m$ cujo anel de coordenadas homogêneas é a k-álgebra $k[\mathbf{f}] \subset k[\mathbf{x}]$. Escrevemos $S := k[\mathbf{f}] \simeq k[\mathbf{Y}]/\mathrm{I(W)}$, onde $\mathrm{I(W)} \subset k[\mathbf{Y}] = k[Y_0, \ldots, Y_m]$ é o ideal homogêneo da imagem $W \subset \mathbb{P}^m$ e $Y_0, \ldots, Y_m$ são novas coordenadas.*

Apesar de existir a definição da imagem de uma aplicação racional no contexto da Geometria Algébrica, como dito anteriormente, por ser um trabalho na área de Álgebra Comutativa, trabalharemos apenas com definições nesse contexto.

Definição 1.2.12. *Sejam $\mathfrak{F}\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ e $\mathfrak{H}\colon \mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ aplicações racionais representadas por $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ e $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_n\}$, respectivamente. Definimos $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ por $(f_0(\mathbf{g}) : \ldots : f_m(\mathbf{g}))$.*

Definição 1.2.13. *Seja $\mathfrak{F}\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional cuja imagem é $W \subset \mathbb{P}^m$. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é uma aplicação **birracional** quando existe uma aplicação racional $\mathfrak{L}\colon \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ cuja imagem é $\mathbb{P}^n$ e as aplicações $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{L}$ e $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{F}$ são aplicações identidades de W e $\mathbb{P}^n$, respectivamente.*

Exemplo 1.2.14. Considere a seguinte aplicação racional

$$\begin{gathered} \mathfrak{M}\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n, \\ (x_0 : x_1 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) \mapsto \\ (x_1 x_2 \cdots x_n : x_0 x_2 x_3 \cdots x_n : \ldots : x_0 x_1 \cdots \underline{x_i} \cdots x_n : \ldots : x_0 x_1 \cdots x_{n-1}) \end{gathered}$$

onde $\underline{x_i}$ significa que essa entrada é omitida. Note que $\mathfrak{M}$ é uma aplicação birracional cuja inversa é ela própria. De fato,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \circ \mathfrak{M} &= (x_0^n x_1^{n-1} x_2^{n-1} \cdots x_n^{n-1} : x_0^{n-1} x_1^n x_2^{n-1} \cdots x_n^{n-1} : \ldots . : x_0^{n-1} x_1^{n-1} x_2^{n-1} \cdots x_n^n) \\ &= (x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_n), \end{aligned}$$

pois

$$I_2 \begin{bmatrix} x_0^n x_1^{n-1} x_2^{n-1} \cdots x_n^{n-1} & x_0^{n-1} x_1^n x_2^{n-1} \cdots x_n^{n-1} & \ldots & x_0^{n-1} x_1^{n-1} x_2^{n-1} \cdots x_{n-1}^{n-1} x_n^n \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Exemplo 1.2.15. A aplicação racional que vimos no Exemplo 1.2.10, $\mathfrak{H} = (qx : qy : y^3 : y^2 z)$, é uma aplicação birracional. Basta verificarmos que seu inverso é $\mathfrak{H}^{-1} = (xz : yz : yw : -xw + y^2)$.

Definição 1.2.16. *Seja $\mathfrak{B}\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ uma aplicação racional. Dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma aplicação **Cremona**, quando $\mathfrak{B}$ for birracional.*

Assim, as aplicações dos Exemplos 1.2.10 e 1.2.14 são Cremonas.

Destacamos que no decorrer do texto trabalharemos apenas com aplicações de Cremona.

1.3 Álgebra de Rees associada a uma Aplicação Racional

Nesta seção definiremos a Álgebra de Rees de um ideal gerado pelos representantes de uma aplicação racional, como também a bigraduação dessa álgebra. Por fim, mostraremos que seu ideal de apresentação independe da escolha do representante da tal aplicação racional. Com este objetivo, iniciemos expondo alguns conceitos gerais. Destacamos que as principais referências dessa seção são [8], [11] e [12].

Definição 1.3.1. *Uma **filtração** de um anel R noetheriano, comutativo e com unidade é uma família* $\mathrm{F} = \{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de ideais de R que satisfazem as seguintes condições:*

(i) $\mathrm{I}_0 = \mathrm{R}$;

(ii) $\ldots \subset \mathrm{I}_n \subset \ldots \subset \mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I}_0$;

(iii) $\mathrm{I}_i.\mathrm{I}_j \subset \mathrm{I}_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.3.2. Seja R um anel e $\mathrm{I} \subset \mathrm{R}$ um ideal. A família das potências ordinárias

$$\mathrm{I}^1,\mathrm{I}^2,\ldots,\mathrm{I}^n,\ldots$$

do ideal I é uma filtração denominada **filtração I-ádica**. De fato, $\mathrm{I}^{n+1} \subset \mathrm{I}^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $a \in \mathrm{I}^{n+1}$ então $a = \sum a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$, onde $a_i \in \mathrm{I}$. Assim, temos $a_i.a_j \in \mathrm{I}$, para todo i, j. Logo, para cada parcela de a, temos $a_1 a_2 \cdots (a_i.a_j) \cdots a_{n+1} \in \mathrm{I}^n$, com $1 \leq \mathrm{i,j} \leq \mathrm{n}$, ou seja, $a \in \mathrm{I}^n$. Assim,

$$\ldots \subset \mathrm{I}^n \subset \ldots \subset \mathrm{I}^2 \subset \mathrm{I}^1 \subset \mathrm{R}.$$

Por outro lado, dados $a = \sum\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)\in\mathbb{N}^i} a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \cdots a_{\alpha_i} \in \mathrm{I}^i$ e $\mathrm{b} = \sum\limits_{(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_j)\in\mathbb{N}^j} a_{\alpha'_1} a_{\alpha'_2} \cdots a_{\alpha'_j} \in \mathrm{I}^j$, com $i, j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} ab &= \left(\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)\in\mathbb{N}^i} a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \cdots a_{\alpha_i}\right)\left(\sum_{(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_j)\in\mathbb{N}^j} a_{\alpha'_1} a_{\alpha'_2} \cdots a_{\alpha'_j}\right) \\ &= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\alpha'_1,\ldots,\alpha'_j)\in\mathbb{N}^{i+j}} a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \cdots a_{\alpha_i} a_{\alpha'_1} a_{\alpha'_2} \cdots a_{\alpha'_j} \in I^{i+j}. \end{aligned}$$

Definição 1.3.3. *Seja* $F = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma filtração do anel R. Definimos a **Álgebra de Rees** da filtração F, por:*

$$\mathcal{R}_R(F) = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i t^i : n \in \mathbb{N}; a_i \in I_i\right\},$$

onde t é uma variável.

Ao longo do trabalho, consideraremos R $= k[x_0, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em $n+1$ variáveis, com sua graduação natural, e I $= (f_0, \ldots, f_m)$ um ideal gerado pelos representantes de uma aplicação racional, onde $f_0, \ldots, f_m$ são formas de mesmo grau d ≥ 1. A notação $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ será usada para denotar a Álgebra de Rees da filtração I-ádica. Sendo assim, temos

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i : n \in \mathbb{N}; a_i \in I^i \right\},$$

onde I $= (f_0, \ldots, f_m)$.

Como I é gerado por $\{f_0, \ldots, f_m\}$ podemos considerar a Álgebra de Rees de $\mathbf{f}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) = \mathrm{R}[f_0 t, \ldots, f_m t].$$

De fato, o homomorfismo de R-álgebras, que preserva R,

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{R}[t_0, \ldots, t_m] &\longrightarrow \mathcal{R}_R(\mathbf{f}), \\ \mathrm{t}_j &\longmapsto f_j t \end{aligned}$$

onde $t, t_0, \ldots, t_m$ são variáveis, é sobrejetor, pois $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ é gerado por

$$f_0^{\alpha_0} \cdots f_m^{\alpha_m} t^n = (f_0 t)^{\alpha_0} \cdots (f_m t)^{\alpha_m},$$

onde $\alpha_0 + \ldots + \alpha_m = n$.

Desse modo, $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ é uma R-álgebra finitamente gerada.

Seja $\mathfrak{F}$: V $\dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional. Fixemos $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ um representante de $\mathfrak{F}$ e seja $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ a álgebra de Rees de $\mathbf{f}$. Considerando o homomorfismo anterior e denotando $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$, pelo 1º Teorema do isomorfismo, temos

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \frac{R[\mathbf{t}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}},$$

onde $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_m)$ são indeterminadas. O ideal $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ é chamado **ideal de apresentação** ou **ideal de definição** de $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$. É importante observar que, como R[$\mathbf{t}$] é Noetheriano, $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ é finitamente gerado. Note também que, uma vez que utilizamos as formas f_j para definir φ, a construção do ideal $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ foi baseada no representante fixado de $\mathfrak{F}$. Mostraremos que tal ideal é um invariante de $\mathfrak{F}$, ou seja, mesmo mudando seu representante $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ é o mesmo. Mas, antes, obteremos algumas ferramentas importantes para concluir esse objetivo.

Definição 1.3.4. *Um anel **bigraduado** é um anel R que admite uma decomposição em soma direta*

$$R = \bigoplus_{i,j=0} R_{ij}$$

com as seguintes propriedades:

(i) Os R_{ij} são subgrupos aditivos de R;

(ii) $R_{ij}.R_{kl} \subset R_{(i+k)(j+l)}$;

(iii) *R é uma* R_{00}*-álgebra finitamente gerada pelos elementos* R_{10} *e* R_{01}.

Um elemento $\mathrm{F} \in \mathrm{R}$ é *bihomogêneo* se $\mathrm{F} \in \mathrm{R}_{ij}$ para algum $(\mathrm{i,j}) \in \mathbb{N}^2$. Se F é bihomogêneo, dizemos que $\mathrm{gr(F)} = (\mathrm{i,j})$. Qualquer polinômio $\mathrm{F} \in \mathrm{R}$ pode ser escrito unicamente como $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + \ldots + \mathrm{F}_t$, onde cada F_i é bihomogêneo. Chamamos as F_i's de *componentes bihomogêneas* de F.

Na sequência, apresentaremos um exemplo de anel bigraduado, o qual exploraremos ao longo da dissertação.

Exemplo 1.3.5. Seja $\mathrm{R} = k[\mathbf{x}]$. Temos que $\mathrm{R}[\mathbf{y}] = k[\mathbf{x,y}]$ é um anel bigraduado. O bigrau de uma forma será denotado por (p,q), sendo p o grau em relação a $\mathbf{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ e q em relação a $\mathbf{y} = \{y_0, \ldots, y_m\}$. Observe que, neste caso, temos que R_{10} e R_{01} são os subgrupos aditivos de $\mathrm{R}[\mathbf{y}]$ gerados pelos conjuntos $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e $\{y_0, \ldots, y_m\}$, respectivamente.

Note que a primeira condição é satisfeita. Basta considerarmos R_{ij} como o grupo aditivo gerado pelos polinômios bihomogêneos de bigrau (i,j), grau i na variável $\mathbf{x}$ e grau j na variável $\mathbf{y}$. Para verificarmos a segunda condição é suficiente verificarmos que o produto de um monômio de R_{ij} por um monômio de R_{kl} estará em $\mathrm{R}_{(i+k)(j+l)}$. Sendo assim, considere

$$f(\mathbf{x,y}) = a_{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\alpha}\mathbf{y}^{\beta} \in \mathrm{R}_{ij} \text{ e } g(\mathbf{x,y}) = a_{\alpha'\beta'}\mathbf{x}^{\alpha'}\mathbf{y}^{\beta'} \in \mathrm{R}_{kl},$$

onde $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$, $\alpha' = (\alpha'_0, \ldots, \alpha'_n)$, $\beta' = (\beta'_0, \ldots, \beta'_m)$, $\sum_{t=0}^{n} \alpha_t = i$, $\sum_{s=0}^{m} \beta_t = j$, $\sum_{t=0}^{n} \alpha'_t = k$ e $\sum_{s=0}^{m} \beta'_t = l$. Então,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x,y})g(\mathbf{x,y}) &= a_{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\alpha}\mathbf{y}^{\beta}a_{\alpha'\beta'}\mathbf{x}^{\alpha'}\mathbf{y}^{\beta'} \\
&= (a_{\alpha\beta}x_0^{\alpha_0}\cdots x_n^{\alpha_n}y_0^{\beta_0}\cdots y_m^{\beta_m})(a_{\alpha'\beta'}x_0^{\alpha'_0}\cdots x_n^{\alpha'_n}y_0^{\beta'_0}\cdots y_m^{\beta'_m}) \\
&= a_{\alpha\beta}a_{\alpha'\beta'}x_0^{\alpha_0+\alpha'_0}\cdots x_n^{\alpha_n+\alpha'_n}y_0^{\beta_0+\beta'_0}\cdots y_m^{\beta_m+\beta'_m} \\
&= a_{\alpha\beta}a_{\alpha'\beta'}\mathbf{x}^{\alpha+\alpha'}\mathbf{y}^{\beta+\beta'} \in \mathrm{R}_{(i+k)(j+l)},
\end{aligned}$$

uma vez que $\sum_{t=0}^{n} \alpha_t + \alpha'_t = i + k$ e $\sum_{s=0}^{m} \beta_t + \beta'_t = j + l$. Agora, dado $h(\mathbf{x,y}) \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$, temos

$$h(\mathbf{x,y}) = \sum a_{\alpha\beta}\mathbf{x}^{\alpha}\mathbf{y}^{\beta} = \sum a_{\alpha\beta}x_0^{\alpha_0}\cdots x_n^{\alpha_n}y_0^{\beta_0}\cdots y_m^{\beta_m},$$

onde quase todas parcelas são nulas a menos de uma quantidade finita. Note que $\mathrm{a}_{\alpha\beta} \in \mathrm{R}_{00}$, $x_t \in \mathrm{R}_{10}$, com $t = 0, \ldots, n$, e $y_s \in \mathrm{R}_{01}$, com $s = 0, \ldots, m$. Portanto, $\mathrm{R}[\mathbf{y}]$ é uma R_{00}-álgebra finitamente gerada por $\mathrm{R}_{10} \bigcup \mathrm{R}_{01}$.

Definição 1.3.6. *Um ideal I de um anel bigraduado R é chamado de* ***ideal bihomogêneo*** *se admite a decomposição*

$$\mathrm{I} = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (\mathrm{I} \cap \mathrm{R}_{ij}).$$

Denotaremos o somando direto $\mathrm{I} \cap \mathrm{R}_{ij}$ por I_{ij}.

O seguinte resultado fornecerá uma importante caracterização para ideais bihomogêneos.

Lema 1.3.7. *Seja R um anel bigraduado e $I \subset R$ um ideal. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) I é um ideal bihomogêneo;

(ii) Para todo $F = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} F_{ij} \in I$, onde F_{ij} é a componente bihomogênea de bigrau (i,j), tem-se também que $F_{ij} \in I$, para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^2$;

(iii) I é gerado por elementos bihomogêneos.

Demonstração.

(i $\Rightarrow$ ii) Se I é um ideal bihomogêneo e $\mathrm{F} \in I$, podemos escrever $\mathrm{F} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{F}_{ij}$, onde cada $\mathrm{F}_{ij} \in I \cap \mathrm{R}_{ij} \subset I$. Logo, $\mathrm{F}_{ij} \in I$, para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

(ii $\Rightarrow$ iii) Como todo elemento de I é escrito como soma de elementos bihomogêneos, os quais pertecem a I, claramente I é gerado por elementos bihomogêneos.

(iii $\Rightarrow$ i) Seja $\mathrm{F} \in I$. Por iii), $\mathrm{F} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{F}_{ij}$, onde F_{ij} são elementos bihomogêneos e $\mathrm{F}_{ij} \in I$. Agrupando os F_{ij} de mesmo grau, se necessário, podemos supor que os bigraus são distintos. Pela unicidade da escrita de F, temos que $\mathrm{F}_{ij} \in I$, para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

□

Lema 1.3.8. *Seja R um anel bigraduado e $I \subset R$ um ideal bihomogêneo. Então, o anel quociente R/I também possui uma graduação induzida pela de R.*

Demonstração. Como

$$\frac{R}{I} \simeq \frac{\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} R_{ij}}{\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} I_{ij}},$$

se mostrarmos que

$$\frac{R}{I} \simeq \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{R_{ij}}{I_{ij}},$$

teremos a graduação desejada.

Sendo assim, construa o seguinte homomorfismo de grupos sobrejetor:

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathrm{R} = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{R}_{ij} &\twoheadrightarrow \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{R}_{ij}/\mathrm{I}_{ij}. \\ (\ldots, a_{ij}, \ldots) &\mapsto (\ldots, a_{ij} \bmod \mathrm{I_{ij}}, \ldots) \end{aligned}$$

Claramente π é um homomorfismo de grupos. Sendo assim, mostraremos que $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{I} = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{I}_{ij}$. De fato, se $b \in \mathrm{Ker}(\pi) \subset \mathrm{R}$ então podemos escrever

$$b = \sum_{ij} b_{ij},$$

onde $b_{ij} \in \mathrm{R}_{ij}$. Note que podemos fazer a seguinte identificação $b = (\ldots, b_{ij}, \ldots)$. Assim, $\pi(b) = \pi(\ldots, b_{ij}, \ldots) = (\ldots, \bar{0}, \ldots)$, isto é, $(\ldots, b_{ij} \bmod \mathrm{I_{ij}}, \ldots) = (\ldots, \bar{0}, \ldots)$. Daí, temos $b_{ij} \in \mathrm{I}_{ij}$, para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Logo, $b \in \mathrm{I}$.

Se $c \in \mathrm{I}$, o qual é um ideal bihomogêneo, então as componentes bihomogêneas c_{ij} de c estão em I. Assim, $c_{ij} \in \mathrm{I} \cap \mathrm{R}_{ij} = \mathrm{I}_{ij}$. Logo, $\pi(c) = \pi(\ldots, c_{ij}, \ldots) = (\ldots, \bar{0}, \ldots)$, ou seja, $c \in \mathrm{Ker}(\pi)$.

Portanto, pelo 1º Teorema do Isomorfismo, o resultado segue. □

Observação 1.3.9. Notemos que ao considerarmos um elemento bihomogêneo em um ideal de apresentação poderemos omitir a variável t quando o avaliarmos no homomorfismo que definimos anteriormente na construção do ideal de apresentação. Isto ocorre justamente por conta da bihomogeneidade do elemento. Utilizaremos essa noção no último resultado desta seção.

Seja $\mathfrak{F}$ uma aplicação racional representada por $\mathbf{f}$, um conjunto de formas de grau $d \geq 1$, e considere o homomorfismo de R-álgebras sobrejetor,

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{R}[\mathbf{y}] &\twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(\mathbf{f}), \\ \mathrm{y}_j &\longmapsto f_j t \end{aligned}$$

com $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_m)$, cujo $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$. Então,

$$h(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}} \Leftrightarrow \varphi(h(\mathbf{x},\mathbf{y})) = 0 \Leftrightarrow h(\mathbf{x},t\mathbf{f}) = 0.$$

Porém, supondo h bihomogêneo de bigrau (p,q), temos

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}} &\Leftrightarrow \varphi(h(\mathbf{x},\mathbf{y})) = 0 \\ &\Leftrightarrow h(\mathbf{x},t\mathbf{f}) = 0 \\ &\Leftrightarrow t^q h(\mathbf{x},\mathbf{f}) = 0 \\ &\Leftrightarrow h(\mathbf{x},\mathbf{f}) = 0. \end{aligned}$$

Proposição 1.3.10. *Se $(\mathbf{f}) = (f_0, \ldots, f_n)$ é um ideal de $\mathrm{R} = k[\mathbf{x}]$ gerado por polinômios homogêneos de mesmo grau $d \geq 1$, então $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ é uma k-álgebra bigraduada.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ é bihomogêneo. Considere $\mathrm{A} = \mathrm{R}[\mathbf{y}]$ e seja $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}} \subset \mathrm{R}[\mathbf{y}]$. Então, existem $g_{ij} \in \mathrm{A}_{ij}$ tais que $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{ij} g_{ij}$, já que estamos em um anel bigraduado. Assim, nosso objetivo, pelo Lema 1.3.7, é mostrar que $g_{ij} \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$. Como $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$, pela observação anterior, temos $g(\mathbf{x},t\mathbf{f}) = 0$. Assim,

$$g(\mathbf{x},t\mathbf{f}) = \sum_{ij} g_{ij}(\mathbf{x},t\mathbf{f}) = 0.$$

Como $\mathrm{gr}(f_j) = d$, para todo $j = 0, \ldots, n$ então

$$\sum_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}, t\mathbf{f}) = \sum_{ij} t^j g_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = 0.$$

Uma vez que podemos ver $\sum_{ij} t^j g_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{f})$ como um polinômio na variável t, por igualdade de polinômios, fixando j, temos

$$\sum_{i} g_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{f}) = 0.$$

Considerando $\sum_{i} g_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{f})$ como um polinômio na variável $\mathbf{x}$, cada parcela tem grau $i + jd$, e novamente por igualdade de polinômios, temos $g_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{f}) = 0$, ou seja, $g_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{f}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$. Portanto, pelo Exemplo 1.3.5 e o fato que $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ é bihomogêneo, temos que

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{f}) \simeq \frac{R[\mathbf{y}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{f}}}$$

é uma k-álgebra bigraduada. □

Agora, de posse dos resultados até aqui podemos apresentar a seguinte proposição:

Proposição 1.3.11. *Sendo* $\mathfrak{F} = (f_0, \ldots, f_n)$ *temos que* $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ *é um invariante de* $\mathfrak{F}$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_n\}$ e $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_n\}$ representantes de $\mathfrak{F}$. Então, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são equivalentes, ou seja, existem elementos homogêneos r, s $\in$ R tais que rf_i = sg_i, para todo $i = 0, \ldots, n$.

Como $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ e $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ são ideais, basta mostrarmos que cada gerador de um deles pertence ao outro. Pelo resultado anterior esses ideais também são bihomogêneos. Assim, pelo Lema 1.3.7, podemos supor que seus geradores também o são.

Seja $h \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ um de seus geradores de bigrau (p,q). Então, pela Observação 1.3.9,

$$h(\mathbf{x},\mathbf{g}) = h(\mathbf{x},\tfrac{r}{s}\mathbf{f}) = (\tfrac{r}{s})^q h(\mathbf{x},\mathbf{f}) = (\tfrac{r}{s})^q.0 = 0.$$

Assim, $h \in \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$. Por outro lado, sendo $h' \in \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ um de seus geradores de bigrau (p′,q′), temos

$$h'(\mathbf{x},\mathbf{f}) = h'(\mathbf{x},\tfrac{s}{r}\mathbf{g}) = (\tfrac{s}{r})^{q'} h'(\mathbf{x},\mathbf{g}) = (\tfrac{s}{r})^{q'}.0 = 0,$$

ou seja, $h' \in \mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ e, portanto, $\mathcal{J}_{\mathbf{f}} = \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$. □

Assim, através dessa proposição decorre que a Álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ independe da escolha do representante de $\mathfrak{F}$, ou seja, $\mathcal{R}_R(\mathbf{f})$ é um invariante de $\mathfrak{F}$.

Capítulo 2

Dual complementar de Newton

Este capítulo é parte chave do trabalho, pois a partir dele conseguiremos introduzir as aplicações no capítulo seguinte. Apresentaremos o Dual complementar de Newton, como também desenvolveremos sua teoria tendo como referência principal [6], onde foram melhorados os resultados de [5], que também foi útil nesse capítulo da dissertação. Exploraremos também uma propriedade, digamos especial: as *restrições canônicas.* Ela estará implícita nas hipóteses dos resultados estudados, por conta da dualidade que utilizaremos a todo momento. Além disso, através de um lema importantíssimo, justificaremos essa tal dualidade, a qual só foi possível por termos as restrições canônicas como hipótese. Destacamos que os resultados mais importantes são o Lema 2.2.3, o qual mencionamos anteriormente, e o Teorema 2.2.12, que é uma generalização da Proposição 2.2.10, e o utilizaremos em diversos pontos do texto.

2.1 Dual Complementar de Newton

Seja R $:= k[\mathbf{x}] = k[x_0, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em $n+1$ indeterminadas com coeficientes em um corpo k. Dado qualquer polinômio $g = \sum_{\alpha} a_\alpha x_0^{e_0} \cdots x_n^{e_n}$ em R, onde $\alpha = e_0 \ldots e_n$, sempre podemos fazer a seguinte associação: $a_\alpha x_0^{e_0} \cdots x_n^{e_n} \leftrightarrow \mathbf{x}^{(e_0,\ldots,e_n)}$. Ao longo do texto chamaremos o vetor $(e_0, \ldots, e_n)$ de **vetor expoente** do termo não nulo $a_\alpha x_0^{e_0} \cdots x_n^{e_n}$ do polinômio g.

Definição 2.1.1. *Seja f uma forma de grau $d \geq 1$ em R. Denote por $N(f)$ a matriz cujas colunas são os vetores expoentes dos termos não nulos de f em uma ordem fixada. A matriz $N(f)$ é chamada* ***matriz-log (ou matriz de Newton)*** *de f. Desse modo, dado um conjunto finito ordenado $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$, com $m \geq 1$, de formas de mesmo grau $d \geq 1$, podemos ver $N(\mathbf{f})$ como a concatenação das matrizes de Newton $N(f_0), \ldots, N(f_m)$. A matriz $N(\mathbf{f})$ é chamada* ***a matriz de Newton do conjunto*** $\mathbf{f}$.

Quando uma matriz quadrada satisfaz as seguintes condições:

1) Todas as entradas são não-negativas;
2) Todas as colunas tem soma de entradas iguais.

a chamamos de **matriz estocástica**. Note que $N(\mathbf{f})$ é uma matriz inteira estocástica.

De fato, suas entradas serão números naturais, já que cada entrada de suas colunas estará associada aos expoentes dos fatores que compõem cada termo das formas. Por outro lado, como $N(\mathbf{f})$ é a concatenação das $N(f_i)$'s e as f_i's têm mesmo grau, as colunas da $N(\mathbf{f})$ terão somas de entradas iguais.

O vetor $\mathbf{c}_f$ cujas entradas são os coeficientes não nulos de uma forma f em uma ordem fixada é chamado de **o quadro de coeficientes** de f. Escrevemos simbolicamente a forma

$$f = < \mathbf{c}_f, \mathbf{x}^{N(f)} > \tag{2.1}$$

como o produto interno do quadro de coeficientes $\mathbf{c}_f$ pelo conjunto dos monômios correspondentes $\mathbf{x}^{N(f)}$ - chamado a **representação de Newton** de f.

A **matriz dual complementar de Newton (ou simplesmente, a matriz dual de Newton)** de $N(\mathbf{f}) = (a_{i,l})$ é a matriz

$$\widehat{N(\mathbf{f})} = (\alpha_i - a_{i,l}) \tag{2.2}$$

onde, para todo $0 \leq i \leq n$, $\alpha_i = \max_l\{a_{il}\}$ (aqui i é fixo), com l indexando o conjunto de todos termos não nulos de todas as formas no conjunto $\mathbf{f}$.

Em outras palavras, denotando $\underline{\alpha} := (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)^t$, temos que

$$\widehat{N(\mathbf{f})} = [\underline{\alpha}| \ldots |\underline{\alpha}]_{(n+1)\times(r_0+\ldots+r_m)} - N(\mathbf{f}), \tag{2.3}$$

onde r_j denota o número de termos não nulos de f_j, $j = 0, \ldots, m$. O vetor $\underline{\alpha}$ é chamado o **vetor diretriz** de $N(\mathbf{f})$ (ou de $\mathbf{f}$ por abuso de notação). Note que $[\underline{\alpha}| \ldots |\underline{\alpha}]_{(n+1)\times(r_0+\ldots+r_m)}$ denota a matriz de ordem $(n+1) \times (r_0 + \ldots + r_m)$ cujas colunas é o vetor $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)^t$.

Para todo $j = 0, \ldots, m$, seja $\widehat{N(\mathbf{f})}_j$ a submatriz de $\widehat{N(\mathbf{f})}$ cujas colunas são provenientes de f_j. Finalmente, considerando o conjunto das formas definidas em termos de suas representações de Newton, temos

$$\widehat{\mathbf{f}} := \{\widehat{f_0} :=< \mathbf{c}_0, \mathbf{x}^{\widehat{N(f)_0}} >, \ldots, \widehat{f_m} :=< \mathbf{c}_m, \mathbf{x}^{\widehat{N(f)_m}} >\},$$

onde $\mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{f_j}$ representa o quadro de coeficientes de f_j. Chamamos $\widehat{\mathbf{f}}$ o **dual complementar de Newton** do conjunto $\mathbf{f}$.

Vejamos alguns exemplos, os quais facilitarão o entendimento dos conceitos vistos acima.

Exemplo 2.1.2. (**Representação de Newton de uma forma**) Seja R = $k[\mathbf{x}] = k[x, y, z]$ um anel de polinômios e considere a seguinte forma $f(x, y, z) = z^2$ - xy em R. O quadro de coeficientes de f é $\mathbf{c}_f$ = (1,-1) e o conjunto dos monômios (o qual é apenas a parte literal de cada termo) é $\mathbf{x}^{N(f)}$ = ($\mathbf{x}^{(0,0,2)}$,$\mathbf{x}^{(1,1,0)}$). Assim,

$$\mathrm{f} = < \mathbf{c}_f, \mathbf{x}^{N(f)} > = < (1, -1), (\mathbf{x}^{(0,0,2)}, \mathbf{x}^{(1,1,0)}) >.$$

Exemplo 2.1.3. (**Matriz de Newton de uma conjunto de formas**) Seja R = $k[\mathbf{x}] = k[x, y, z]$ um anel de polinômios. Considere o seguinte conjunto $\mathbf{f} = \{xy^3 + z^4, x^2z^2, xyz^2\}$ de formas com grau 4. Tome $f_0 = xy^3 + z^4$, $f_1 = x^2z^2$ e $f_2 = xyz^2$. Notamos anteriormente que podemos fazer as seguintes associações:

$$\begin{cases} xy^3 + z^4 \leftrightarrow \mathbf{x}^{(1,3,0)}, \mathbf{x}^{(0,0,4)} \\ x^2z^2 \leftrightarrow \mathbf{x}^{(2,0,2)} \\ xyz^2 \leftrightarrow \mathbf{x}^{(1,1,2)} \end{cases},$$

onde (1,3,0) e (0,04) são os vetores expoentes de f_0, (2,0,2) de f_1 e (1,1,2) de f_2. Então,

$$\mathrm{N}(f_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, N(f_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e\ N(f_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como N($\mathbf{f}$) é a concatenação de N(f_0), N(f_1) e N(f_2), temos que

$$\mathrm{N}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

é a matriz de Newton do conjunto $\mathbf{f}$.

Observe que na equação 2.2 o $\mathbf{i}$ é fixo. Já l indexava o conjunto de todos os termos não nulos de todas as formas que compõem $\mathbf{f}$. Como $r_0 = 2$ e $r_1 = r_2 = 1$ denotam os termos não nulos de cada forma, então $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq l \leq 4$ e

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = \max_l\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\} = \max\{1,0,2,1\} = 2 \\ \alpha_2 = \max_l\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}\} = \max\{3,0,0,1\} = 3 \\ \alpha_3 = \max_l\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}\} = \max\{0,4,2,2\} = 4 \end{array}$$

são os máximos da 1ª, 2ª e 3ª linha, respectivamente, da matriz de Newton de $\mathbf{f}$. Logo,

$$\widehat{N(\mathbf{f})} = \begin{bmatrix} 2-1 & 2-0 & 2-2 & 2-1 \\ 3-3 & 3-0 & 3-0 & 3-1 \\ 4-0 & 4-4 & 4-2 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

é a matriz dual de Newton de $N(\mathbf{f})$.

Agora, relacionando o que encontramos com a equação 2.3, temos que o vetor diretriz de $N(\mathbf{f})$ é

$$\underline{\alpha} := (2,3,4)^t$$

e

$$[\underline{\alpha}| \ldots |\underline{\alpha}]_{(n+1)\times(r_0+r_1+r_2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

onde n = 2, $r_0 = 2$ e $r_1 = r_2 = 1$.

Exemplo 2.1.4. Considere o mesmo conjunto de formas do exemplo anterior. Vimos que

$$\widehat{N(\mathbf{f})} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então, o dual complementar de Newton do conjunto $\mathbf{f}$, do Exemplo 2.1.3, é $\widehat{\mathbf{f}} = \{xz^4 + x^2y^3, y^3z^2, xy^2z^2\}$. Ou seja, $\mathbf{c}_{f_0} = (1{,}1)$, $\mathbf{c}_{f_1} = \mathbf{c}_{f_2} = 1$ e

$$\widehat{N(f)}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \widehat{N(f)}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \; e \; \widehat{N(f)}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\mathbf{f}$ um conjunto de formas de mesmo grau, é importante notar que a submatriz $\widehat{N(\mathbf{f})}_j$ é, em geral, diferente da matriz dual de Newton de $\widehat{N(f_j)}$. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1.5. Considere $\mathbf{g} = \{2x^3 + xy^2, y^3\}$ um conjunto de formas de grau 3. Daí, temos que

$$\widehat{N(\mathbf{g})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; N(g_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

onde $\mathrm{g}_1 = 2x^3 + xy^2$. Mas,

$$\widehat{N(\mathbf{g})}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \widehat{N(g_1)}.$$

Exemplo 2.1.6. Seja $g \in \mathrm{R} = k[\mathbf{x}]$ um monômio. Então, $\widehat{g} = 1$. De fato, tome $g = x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n} \in \mathrm{R}$. Então,

$$\mathrm{N}(g) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Assim, $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)^t$ é o vetor diretriz de $\mathrm{N}(g)$. Portanto,

$$\widehat{N(g)} = \begin{bmatrix} a_0 - a_0 \\ a_1 - a_1 \\ \vdots \\ a_n - a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\widehat{g} = x_0^0 \cdots x_n^0 = 1$.

Exemplo 2.1.7. Sendo $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ um conjunto de formas de grau d em R, o grau comum das formas em $\widehat{\mathbf{f}}$ é o **grau dual** $\widehat{d} := \alpha_0 + \ldots + \alpha_n - d$. De fato, considerando $\mathrm{N}(\mathbf{f})$, sem perda de generalidade, suponha que a matriz abaixo decorre de f_i:

$$N(\mathbf{f})_i = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0r_i} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr_i} \end{bmatrix},$$

onde $r_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ e note que todas colunas tem soma igual a d. Então, calculando o dual, teremos

$$\widehat{N(\mathbf{f})}_i = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_{01} & \alpha_0 - a_{02} & \dots & \alpha_0 - a_{0r_i} \\ \alpha_1 - a_{11} & \alpha_1 - a_{12} & \dots & \alpha_1 - a_{1r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - a_{n1} & \alpha_n - a_{n2} & \dots & \alpha_n - a_{nr_i} \end{bmatrix}.$$

Logo, em toda coluna, teremos que a soma

$$\begin{aligned} \alpha_0 - a_{0r_i} + \alpha_1 - a_{1r_i} + \ldots + \alpha_n - a_{nr_i} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - (a_{0r_i} + a_{1r_i} + \ldots + a_{nr_i}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - d \\ &= \widehat{d}, \end{aligned}$$

ou seja, o grau das formas em $\widehat{\mathbf{f}}$ é $\widehat{d}$, para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$.

Observação 2.1.8. Sendo h uma forma em R, se $\mathrm{gr}(h) \geq 1$ então $\mathrm{gr}(\widehat{h}) \geq 1$?

Percebamos que nem sempre é verdade. Considere $h = x_1x_2$. Pelo Exemplo 2.1.6, temos $\widehat{h} = 1$, ou seja, $\mathrm{gr}(h) = 2 > 1$, porém $\mathrm{gr}(\widehat{h}) = 0$. Mas, note que a pergunta tem resposta afirmativa se h não for um monômio.

A seguir veremos um exemplo que terá grande utilidade na próxima seção.

Exemplo 2.1.9. *Considere $\mathbf{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ um conjunto de formas. Então o vetor diretriz é $(1, \ldots, 1)^t$ e $\widehat{\mathbf{x}} = \{x_1 \cdots x_n, \ldots, x_0 \cdots \underline{x_i} \cdots x_n, \ldots, x_0 \cdots x_{n-1}\}$, onde $\underline{x_i}$ significa que x_i é omitida. Note que $\widehat{\mathbf{x}}$ define a aplicação racional do Exemplo 1.2.14. Em termos de mapas racionais definidos pelas respectivas formas, isto diz que o Dual complementar de Newton do mapa identidade de $\mathbb{P}^n$ é a* ***involução recíproca de Magnus****, a qual denotaremos por $\mathfrak{M}$. E, como já foi visto no Exemplo 1.2.14, a involução é uma aplicação birracional cujo inverso é ela própria.*

2.2 Propriedades

Nesta seção exploraremos alguns resultados que o dual complementar de Newton satisfaz. Destacamos que essa parte do trabalho é primordial, pois é a partir daqui que concluiremos o objetivo principal. Notaremos que o termo dual não foi escolhido de maneira aleatória. Na sequência justificaremos essa tal escolha.

Definição 2.2.1. *Seja $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ um conjunto de formas. Se, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, x_i não divide mdc$(f_0, \ldots, f_m)$ e toda variável x_i aparece em algum f_j dizemos que $\mathbf{f}$ satisfaz as* ***restrições canônicas****.*

Exemplo 2.2.2. Seja $\mathbf{f} = \{x^2y, xz^2 + z^3\}$ em $\mathrm{R} = k[x, y, z]$ um conjunto de formas de mesmo grau. Considere $\mathbf{g} = (x + y)\mathbf{f}$ e $\mathbf{h} = y\mathbf{f}$ dois conjuntos de formas. Calculando a matriz de Newton de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$, obtemos

$$N(\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \;\; e \;\; N(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\widehat{N(\mathbf{g})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;\; e \;\; \widehat{N(\mathbf{h})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Repetindo o mesmo processo, encontramos

$$\widehat{\widehat{N(\mathbf{g})}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \;\; e \;\; \widehat{\widehat{N(\mathbf{h})}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\mathbf{g} = \widehat{\widehat{\mathbf{g}}}$, mas $\mathbf{h} \neq \widehat{\widehat{\mathbf{h}}}$. Note que isso ocorreu justamente por $\mathbf{g}$ satisfazer as restrições canônicas e $\mathbf{h}$ não satisfazê-las, pois a variável y divide o mdc das formas que compõem $\mathbf{h}$. Como $\mathrm{N}(\mathbf{h})$ não tinha uma entrada nula em todas suas linhas, o máximo da segunda linha não foi mantido na segunda linha de $\widehat{N(\mathbf{h})}$. Formalmente, ambas matrizes possuem vetores diretriz diferentes.

Veremos, no seguinte lema, a vantagem em um conjunto de formas de mesmo grau satisfazer as restrições canônicas. Esse resultado será crucial para nosso trabalho, uma vez que o utilizaremos em diversos momentos nas nossas demonstrações. Talvez, se trabalhássemos sem a hipótese desse lema, a teoria não chegaria a tal ponto.

Lema 2.2.3. *Se* $\mathbf{f}$ *satisfaz as restrições canônicas então*

(i) $\widehat{\mathbf{f}}$ *também satisfaz as restrições canônicas;*

(ii) $\mathrm{N}(\mathbf{f})$ *e* $\widehat{N(\mathbf{f})}$ *possuem o mesmo vetor diretriz;*

(iii) $\widehat{\widehat{\mathbf{f}}} = \mathbf{f}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ um conjunto com $n+1$ formas, com grau $d \geq 1$, satisfazendo as restrições canônicas. Antes de começarmos a demonstração dos quesitos, vejamos que $\mathrm{N}(\mathbf{f})$ possui as seguintes propriedades:

(a) Dado qualquer $i = 0, \ldots, n$, existe l tal que $a_{il} = 0$;

(b) Para todo $i = 0, \ldots, n$, algum $a_{ik} \neq 0$.

De fato, com relação a propriedade (a), suponha que existe i tal que $a_{il} \neq 0$, para todo l. Como os elementos da linha i são exatamente os expoentes da variável x_i, temos que x_i aparecerá em todos os termos de cada f_j, com $j = 0, \ldots, m$. Assim, $x_i \mid f_j$, para todo j, ou seja, $x_i \mid mdc(f_0, \ldots, f_m)$. Porém, isso é um absurdo, pois contradiz a primeira condições das restrições canônicas. Agora, com relação a propriedade (b), suponha que existe i tal que $a_{ik} = 0$, para todo k. Então, x_i não aparecerá em nenhum dos termos de f_j, para todo $j = 0, \ldots, m$. Mas, isso contradiz a segunda condição das restrições canônicas, já que toda variável x_i aparecerá em alguma f_j. Portanto, as duas propriedades são válidas.

Agora, provemos o lema.

(i) Nosso objetivo nesse quesito é apenas mostrar que $\widehat{\mathbf{f}}$ possui as duas propriedades das restrições canônicas. Sendo assim, note que, pela propriedade (b), para qualquer i, $\alpha_i \geq 1$ (ou seja, em cada linha encontramos uma entrada não nula e, considerando o fato de que $N(\mathbf{f})$ é uma matriz inteira, esse máximo só pode ser $\geq 1 > 0$). Fixe i e suponha que a_{ik} é o máximo, para algum k. Podemos fazer essa suposição, já que o máximo sempre existirá e estará dentre os elementos de cada linha, os quais são finitos. Então, α_i - $a_{ik} = 0$, ou seja, em todas as linhas de $\widehat{N(\mathbf{f})}$ teremos, no mínimo, uma entrada nula. Logo, $\widehat{\mathbf{f}}$ também satisfaz a propriedade (a), ou seja, satisfaz a primeira condição das restrições canônicas.

Agora, pela propriedade (a), em cada linha de N($\mathbf{f}$) temos uma entrada nula. Então, em $\widehat{N(\mathbf{f})} = (b_{ij})$, α_i assumirá essas entradas. Logo, para todo $i = 0, \ldots, n$, existirá algum k tal que $b_{ik} \neq 0$. Assim, $\widehat{\mathbf{f}}$ também satisfaz a propriedade (b), ou seja, satisfaz a segunda condição das restrições canônicas.

Portanto, o item segue.

(ii) Fixe i e escreva $\widehat{N(\mathbf{f})} = (b_{ij})$. Por definição, $b_{ij} = \alpha_i - a_{ij}$, para todo $j = 0, \ldots, n$, onde $\alpha_i = \max_j\{a_{ij}\}$. Seja $\beta_i = \max_j\{b_{ij}\} = \max_j\{\alpha_i - a_{ij}\}$. Então, $\beta_i = \alpha_i$ - $\min_j\{a_{ij}\} = \alpha_i$, já que $\min_j\{a_{ij}\} = 0$, uma vez que em cada linha sempre terá uma entrada nula. Logo, $\widehat{N(\mathbf{f})}$ possui o mesmo vetor diretriz de N($\mathbf{f}$).

(iii) Nesse quesito, é suficiente mostrarmos que $\widehat{\widehat{N(\mathbf{f})}} = N(\mathbf{f})$. Do item ii), temos

$$(\widehat{\widehat{N(\mathbf{f})}})_{ij} = \beta_i \text{ - } b_{ij} = \alpha_i \text{ - } (\alpha_i \text{ - } a_{ij}) = a_{ij}.$$

Observe que podemos realizar o cálculo da última igualdade já que $\mathbf{f}$ possui a propriedade (a). De fato, essa propriedade é importantíssima, pois caso contrário, existiria uma linha i em N($\mathbf{f}$) tal que $a_{ij} \neq 0$, para todo $j = 0, \ldots, (r_0 + \ldots + r_m)$. Desse modo, $\min_j\{a_{ij}\} \geq 1$, ou seja, não conseguiríamos garantir que $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ (no item anterior) e tampouco a igualdade acima.

Portanto, $\widehat{\widehat{N(\mathbf{f})}} = (\beta_i \text{ - } b_{ij}) = (a_{ij}) = N(\mathbf{f})$. □

Uma vez provado esse resultado, destacamos que a Dualidade descrita no título do nosso trabalho é justamente consequência do item (iii) do lema acima.

Lema 2.2.4. *Seja* $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_n\} \subset R$ *um conjunto de monômios de mesmo grau* $d \geq 1$ *e* $\widehat{\mathbf{g}} = \{h_0, \ldots, h_n\}$ *o seu dual. Então,* $h_i g_i = x_0^{\beta_0} \cdots x_n^{\beta_n}$*, para todo* $i = 0, \ldots, n$*, onde* $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ *é o vetor diretriz de* N($\mathbf{g}$).

Demonstração. Considere

$$\begin{aligned} g_0 &= x_0^{\alpha_{00}} x_1^{\alpha_{10}} x_2^{\alpha_{20}} \cdots x_i^{\alpha_{i0}} \cdots x_n^{\alpha_{n0}} \\ g_1 &= x_0^{\alpha_{01}} x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{21}} \cdots x_i^{\alpha_{i1}} \cdots x_n^{\alpha_{n1}} \\ &\vdots \\ g_i &= x_0^{\alpha_{0i}} x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \cdots x_i^{\alpha_{ii}} \cdots x_n^{\alpha_{ni}} \\ &\vdots \\ g_n &= x_0^{\alpha_{0n}} x_1^{\alpha_{1n}} x_2^{\alpha_{2n}} \cdots x_i^{\alpha_{in}} \cdots x_n^{\alpha_{nn}}. \end{aligned}$$

Então

$$\mathrm{N}(\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0i} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i0} & \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ii} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Como $\beta_i = \max_{0 \leq k \leq n}\{\alpha_{ik}\}$, com $i = 0, \dots, n$, temos

$$\widehat{N(\mathbf{g})} = \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_{00} & \beta_0 - \alpha_{01} & \dots & \beta_0 - \alpha_{0i} & \dots & \beta_0 - \alpha_{0n} \\ \beta_1 - \alpha_{10} & \beta_1 - \alpha_{11} & \dots & \beta_1 - \alpha_{1i} & \dots & \beta_1 - \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_i - \alpha_{i0} & \beta_i - \alpha_{i1} & \dots & \beta_i - \alpha_{ii} & \dots & \beta_i - \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n - \alpha_{n0} & \beta_n - \alpha_{n1} & \dots & \beta_n - \alpha_{ni} & \dots & \beta_n - \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, $h_i = x_0^{\beta_0 - \alpha_{0i}} x_1^{\beta_1 - \alpha_{1i}} \cdots x_n^{\beta_n - \alpha_{ni}}$, para todo $i = 0, \dots, n$. Logo,

$$\begin{aligned} h_i g_i &= (x_0^{\beta_0 - \alpha_{0i}} x_1^{\beta_1 - \alpha_{1i}} \cdots x_n^{\beta_n - \alpha_{ni}})(x_0^{\alpha_{0i}} x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \cdots x_i^{\alpha_{ii}} \cdots x_n^{\alpha_{ni}}) \\ &= x_0^{\beta_0 - \alpha_{0i} + \alpha_{0i}} x_1^{\beta_1 - \alpha_{1i} + \alpha_{1i}} \cdots x_n^{\beta_n - \alpha_{ni} + \alpha_{ni}} \\ &= x_0^{\beta_0} \cdots x_n^{\beta_n}, \end{aligned}$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. □

Observação 2.2.5. Seja g $\in$ R $:= k[x_0, \dots, x_n]$ uma forma arbitrária de grau d ≥ 1 e $\mathbf{x} = \{x_0, \dots, x_n\}$. Considere $\widehat{\mathbf{x}} = \{x_1 \cdots x_n, \dots, x_0 \cdots \underline{x_i} \cdots x_n, x_0 \cdots x_{n-1}\}$ onde $\underline{x_i}$ significa que x_i é omitida. Podemos avaliar $g(\widehat{\mathbf{x}})$, considerando $\widehat{\mathbf{x}}$ como uma $(n+1)$-upla. Analogamente, se $\mathfrak{B}$: $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é uma aplicação racional definida pelo conjunto de formas $\mathbf{g} = \{g_0, \dots, g_m\} \subset$ R de mesmo grau então o mapa racional obtido pela composição de $\mathfrak{B}$ com a involução de Magnus é definido da seguinte forma: $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = \{g_0(\widehat{\mathbf{x}}), \dots, g_m(\widehat{\mathbf{x}})\}$. Além disso, ao multiplicarmos um monômio $x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n}$ por $\widehat{\mathbf{g}}$, basta considerarmos o conjunto $\{x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n} \widehat{g_0}, \dots, x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n} \widehat{g_m}\}$, onde $\beta := (\beta_0, \dots, \beta_n)^t$ é o vetor diretriz de N$(\mathbf{g})$. Ou seja, multiplicar um monômio por um conjunto de formas é o mesmo que multiplicá-lo em cada elemento desse conjunto. Ao longo da dissertação utilizaremos essas noções.

Observação 2.2.6. No decorrer do trabalho utilizaremos a notação $\sqcup$ para representar a concatenação de matrizes que possuem o mesmo número de linhas, como também a concatenação dos quadros de coeficientes de formas. Por exemplo, sendo f, $g \in k[\mathbf{x}]$ duas formas de mesmo grau, temos $\mathrm{N}(f) \sqcup \mathrm{N}(g)$, a concatenação das matrizes de Newton, e $\mathrm{c}_f \sqcup \mathrm{c}_g$, a concatenação dos quadros.

Lema 2.2.7. *Seja $g \in R := k[x_0, \ldots, x_n]$ uma forma arbitrária e $\widehat{\mathbf{x}}$ o dual complementar de Newton de $\mathbf{x} := \{x_0, \ldots, x_n\}$. Então, $\mathrm{N}(g(\widehat{\mathbf{x}})) = \mathrm{N}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{N}(g)$, onde o ponto indica a matriz multiplicação. Em particular,*

$$g(\widehat{\mathbf{x}}) = < \mathbf{c}_g, \mathbf{x}^{N(\widehat{x}) \cdot N(g)} >.$$

Demonstração. Primeiramente, suponha que $g = \mathrm{c}x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$ é um termo em $k[x_0, \ldots, x_n]$, com $\mathrm{c} \in k$. Note que $g(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathrm{c}(x_1 \cdots x_n)^{\alpha_0} \cdots (x_0 \cdots x_{n-1})^{\alpha_n} = \mathrm{c}x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n}$, onde $a_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \underline{\alpha_i} + \ldots + \alpha_n$, com α_i omitida, para todo $i = 0, \ldots, n$. Então,

$$\mathrm{N}(g(\widehat{\mathbf{x}})) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, temos

$$\mathrm{N}(\widehat{\mathbf{x}})\mathrm{N}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \\ \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

ou seja, $\mathrm{N}(g(\widehat{\mathbf{x}})) = \mathrm{N}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{N}(g)$ e vale a igualdade da representação de Newton de $g(\widehat{\mathbf{x}})$, já que $\mathbf{c}_g = \mathbf{c}_{g(\widehat{\mathbf{x}})}$.

Como toda forma é soma de termos, para concluirmos o resultado, é suficiente mostrarmos a seguinte igualdade: $\mathrm{N}((g_1 + g_2)(\widehat{\mathbf{x}})) = \mathrm{N}(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{N}(g_1 + g_2)$, onde g_1, g_2 são formas satisfazendo a igualdade desejada e não possuem termos em comum (podemos sempre fazer essa exigência, pois caso possuam termos em comum, basta reagrupá-los na soma). Assim,

$$\begin{aligned} N((g_1 + g_2)(\widehat{\mathbf{x}})) &= N(g_1(\widehat{\mathbf{x}}) + g_2(\widehat{\mathbf{x}})) \\ &= N(g_1(\widehat{\mathbf{x}})) \sqcup N(g_2(\widehat{\mathbf{x}})) \\ &= N(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot N(g_1) \sqcup N(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot N(g_2) \\ &= N(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot (N(g_1) \sqcup N(g_2)) \\ &= N(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot N(g_1 + g_2), \end{aligned}$$

como queríamos. Note que nessas condições, temos $\mathbf{c}_{g_1+g_2} = \mathbf{c}_{g_1} \sqcup \mathbf{c}_{g_2}$, ou seja, basta concatenar os quadros de coeficientes de cada forma mantendo a ordem da soma. Portanto,

$$\begin{aligned} (g_1 + g_2)(\widehat{\mathbf{x}}) &= < \mathbf{c}_{g_1} \sqcup \mathbf{c}_{g_2}, \mathbf{x}^{N((g_1+g_2)(\widehat{x}))}) > \\ &= < \mathbf{c}_{g_1} \sqcup \mathbf{c}_{g_2}, \mathbf{x}^{N(\widehat{x}) \cdot N(g_1+g_2)} > \\ &= < \mathbf{c}_{g_1+g_2}, \mathbf{x}^{N(\widehat{x}) \cdot N(g_1+g_2)} >, \end{aligned}$$

e o resultado segue.

$\square$

Agora provaremos dois lemas importantes para a conclusão da proposição que virá na sequência.

Lema 2.2.8. *Seja* $\mathbf{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *um conjunto de formas e* $\widehat{\mathbf{x}}$ *o seu dual. Então,*

$$\mathrm{N}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbb{I} \text{ - } \mathrm{N}(\mathbf{x}),$$

onde $\mathbb{I}$ *é a matriz de ordem* $(n+1) \times (n+1)$ *cujas entradas são todas iguais a 1.*

Demonstração. De fato, basta notarmos que

$$\mathbb{I} \text{ - } \mathrm{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{N}(\widehat{\mathbf{x}}).$$

□

Lema 2.2.9. *Seja* $g \in R := k[x_0, \ldots, x_n]$ *uma forma arbitrária de grau* $d \geq 1$ *e* $\beta := (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ *o vetor diretriz de N(g). Então,*

$$\mathbb{I}.N(g) - [\underline{\beta} \mid \ldots \mid \underline{\beta}] = [\underline{\alpha} \mid \ldots \mid \underline{\alpha}],$$

onde $\underline{\alpha} = (d - \beta_0, d - \beta_1, \ldots, d - \beta_n)^t$ *e* $\mathbb{I}$ *a matriz de ordem* $(n+1) \times (n+1)$ *cujas entradas são todas iguais a 1.*

Demonstração. Considere

$$\mathrm{N}(g) = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

a matriz de Newton de g. Note que para cada $j = 0, \ldots, n$ fixado, temos $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{ij} = d$. Então,

$$\mathbb{I}.N(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i0} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i1} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{in} \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i0} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i1} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{in} \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i0} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i1} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i0} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i1} & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i2} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & d & d & \ldots & d \\ d & d & d & \ldots & d \\ d & d & d & \ldots & d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \ldots & d \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbb{I}.N(g) - [\underline{\beta} \mid \dots \mid \underline{\beta}] = \begin{bmatrix} d-\beta_0 & d-\beta_0 & d-\beta_0 & \dots & d-\beta_0 \\ d-\beta_1 & d-\beta_1 & d-\beta_1 & \dots & d-\beta_1 \\ d-\beta_2 & d-\beta_2 & d-\beta_2 & \dots & d-\beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d-\beta_n & d-\beta_n & d-\beta_n & \dots & d-\beta_n \end{bmatrix} = [\underline{\alpha} \mid \dots \mid \underline{\alpha}].$$

□

Proposição 2.2.10. *Seja $g \in R := k[x_0, \dots, x_n]$ uma forma arbitrária de grau $d \geq 1$ e $\widehat{g}$ seu dual complementar de Newton. Então*

$$g(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n} \widehat{g},$$

onde $\widehat{\mathbf{x}}$ é o dual complementar de Newton do conjunto $\mathbf{x} := \{x_0, \dots, x_n\}$ e $\beta := (\beta_0, \dots, \beta_n)^t$ é o vetor diretriz de $N(g)$.

Demonstração. Uma vez que os quadros de coeficientes de $g(\widehat{\mathbf{x}})$ e $x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n}\widehat{g}$ são iguais, considerando suas respectivas representações de Newton, basta mostrarmos que

$$\mathrm{N}(g(\widehat{\mathbf{x}})) = \mathrm{N}(x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n}\widehat{g}).$$

Note que

$$\mathrm{N}(x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n}\widehat{g}) = [\underline{\alpha}| \dots |\underline{\alpha}]_{(n+1)\times r} + \widehat{N(g)},$$

onde r é a quantidade de termos não nulos de g e $\underline{\alpha} = (d-\beta_0, \dots, d-\beta_n)^t$. De fato, cada termo de $\widehat{g}$ será multiplicado por $x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n}$ e ao somarmos essas duas matrizes (à direita da igualdade) estaremos determinando o grau de cada fator dos termos não nulos de $x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n}\widehat{g}$. Desse modo, pelo Lema 2.2.7, nosso objetivo é provar que

$$\mathrm{N}(\widehat{\mathbf{x}}).\mathrm{N}(\mathrm{g}) = [\underline{\alpha}| \dots |\underline{\alpha}]_{(n+1)\times r} + \widehat{N(g)}.$$

Mas

$$\begin{aligned} N(\widehat{\mathbf{x}}).N(g) &= (\mathbb{I} - N(\mathbf{x})).N(g) \ \ (\textit{pelo Lema } 2.2.8) \\ &= \mathbb{I}.N(g) - N(\mathbf{x}).N(g) \\ &= \mathbb{I}.N(g) - N(g(\mathbf{x})) \ \ (\textit{pelo Lema } 2.2.7) \\ &= \mathbb{I}.N(g) - N(g) \ \ (\text{como } \mathbf{x} = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ temos } \mathrm{g}(\mathbf{x}) = \mathrm{g}) \\ &= \mathbb{I}.N(g) - [\underline{\beta}| \dots |\underline{\beta}] + [\underline{\beta}| \dots |\underline{\beta}] - N(g) \\ &= \mathbb{I}.N(g) - [\underline{\beta}| \dots |\underline{\beta}] + \widehat{N(g)} \ \ (\textit{pela Equação } 2.3) \\ &= [\underline{\alpha}| \dots |\underline{\alpha}] + \widehat{N(g)} \ \ (\textit{pelo Lema } 2.2.9), \end{aligned}$$

como queríamos. □

A proposição nos diz que para avaliar uma forma g, de grau d $\geq$ 1, na involução recíproca de Magnus, basta multiplicarmos seu dual complementar de Newton por um monômio específico. Na verdade, esse resultado nos mostra uma forma mais simples de calcular $g(\widehat{\mathbf{x}})$ do que calculá-lo como foi feito na Observação 2.2.5. Notemos que conseguiremos concluir facilmente o seguinte resultado utilizando essa proposição.

Corolário 2.2.11. *Sejam $p, q \in R$ formas de grau r,s respectivamente. Então,* $\widehat{pq} = \widehat{p}\widehat{q}$.

Demonstração. Considere $g = pq$. Daí, $g(\widehat{\mathbf{x}}) = (pq)(\widehat{\mathbf{x}}) = p(\widehat{\mathbf{x}})q(\widehat{\mathbf{x}})$, onde $\widehat{\mathbf{x}}$ é o dual complementar de Newton de $\mathbf{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Pela Proposição 2.2.10, temos

$$\begin{cases} p(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{r-\alpha_0} \cdots x_n^{r-\alpha_n}\widehat{p} \\ q(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{s-\beta_0} \cdots x_n^{s-\beta_n}\widehat{q} \\ g(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\gamma_0} \cdots x_n^{d-\gamma_n}\widehat{g} \end{cases},$$

onde $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)^t$, $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ e $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)^t$ são os vetores diretriz de N(p), N(q) e N(g), respectivamente. Como $g = pq$, temos

$$g(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\gamma_0} \cdots x_n^{d-\gamma_n}\widehat{g} = x_0^{d-\gamma_0} \cdots x_n^{d-\gamma_n}\widehat{pq}. \tag{2.4}$$

Mas

$$g(\widehat{\mathbf{x}}) = p(\widehat{\mathbf{x}})q(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{r+s-\alpha_0-\beta_0} \cdots x_n^{r+s-\alpha_n-\beta_n}\widehat{p}\widehat{q} = x_0^{d-\alpha_0-\beta_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n-\beta_n}\widehat{p}\widehat{q}. \tag{2.5}$$

Note que $\mathrm{gr}_{x_i}(g) = \mathrm{gr}_{x_i}(p) + \mathrm{gr}_{x_i}(q)$, para todo $i = 0, \ldots, n$. Então, $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$, ou seja, $\gamma = \alpha + \beta$. Assim, podemos reescrever a equação 2.5

$$g(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\alpha_0-\beta_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n-\beta_n}\widehat{p}\widehat{q} = x_0^{d-\gamma_0} \cdots x_n^{d-\gamma_n}\widehat{p}\widehat{q}. \tag{2.6}$$

Logo, igualando as equações 2.4 e 2.6, temos $\widehat{pq} = \widehat{p}\widehat{q}$, como queríamos. □

Agora estenderemos a Proposição 2.2.10 para um conjunto de formas.

Teorema 2.2.12. *Seja* $\mathbf{g} := \{g_0, \ldots, g_m\} \subset R := k[x_0, \ldots, x_n]$ *um conjunto arbitrário de formas com mesmo grau $d \geq 1$. Então,*

$$\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n}\widehat{\mathbf{g}},$$

onde $\widehat{\mathbf{x}}$ é o dual complementar de Newton do conjunto $\mathbf{x} := \{x_0, \ldots, x_n\}$ e $\beta := (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ é o vetor diretriz de $\mathrm{N}(\mathbf{g})$.

Demonstração. Aplicando a Proposição 2.2.10 com $g := g_i$ temos

$$g_i(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{d-\beta_{n,i}}\widehat{g_i},$$

onde $(\beta_{0,i}, \ldots, \beta_{n,i})^t$ é o vetor diretriz de $\mathrm{N}(g_i)$. Sabemos que, para cada i, $\beta_i = \max_j\{\beta_{i,j}\}$, onde $j = 0, \ldots, m$. Então, $\beta_i \geq \beta_{i,j}$, ou seja, $\beta_i - \beta_{i,j} \geq 0$, para todo $i = 0, \ldots, n$ e para todo $j = 0, \ldots, (r_0 + \ldots + r_m)$. Assim,

$$\begin{aligned} x_0^{d-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{d-\beta_{n,i}}\widehat{g_i} &= x_0^{d-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{d-\beta_{n,i}} \frac{x_0^{\beta_0-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,i}}}{x_0^{\beta_0-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,i}}}\widehat{g_i} \\ &= x_0^{d-\beta_{0,i}-(\beta_0-\beta_{0,i})} \cdots x_n^{d-\beta_{n,i}-(\beta_n-\beta_{n,i})} x_0^{\beta_0-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,i}}\widehat{g_i} \\ &= x_0^{d-\beta_{0,i}-\beta_0+\beta_{0,i}} \cdots x_n^{d-\beta_{n,i}-\beta_n+\beta_{n,i}} x_0^{\beta_0-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,i}}\widehat{g_i} \\ &= x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n} x_0^{\beta_0-\beta_{0,i}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,i}}\widehat{g_i}. \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) &= \{g_0(\widehat{\mathbf{x}}), \ldots, g_m(\widehat{\mathbf{x}})\} \\
&= \{x_0^{d-\beta_{0,0}} \cdots x_n^{d-\beta_{n,0}} \widehat{g_0}, \ldots, x_0^{d-\beta_{0,m}} \cdots x_n^{d-\beta_{n,m}} \widehat{g_m}\} \\
&= \{x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n} x_0^{\beta_0-\beta_{0,0}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,0}} \widehat{g_0}, \ldots, x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n} x_0^{\beta_0-\beta_{0,m}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,m}} \widehat{g_m}\} \\
&= x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n} \{x_0^{\beta_0-\beta_{0,0}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,0}} \widehat{g_0}, \ldots, x_0^{\beta_0-\beta_{0,m}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,m}} \widehat{g_m}\}.
\end{aligned}$$

Se mostrarmos que $\widehat{\mathbf{g}} = \{x_0^{\beta_0-\beta_{0,0}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,0}} \widehat{g_0}, \ldots, x_0^{\beta_0-\beta_{0,m}} \cdots x_n^{\beta_n-\beta_{n,m}} \widehat{g_m}\}$, através das suas respectivas matrizes de Newton, ou seja, mostrando a igualdade entre elas, teremos o resultado. Sendo assim, provemos a seguinte afirmação:

Afirmação 2.2.13. $\mathrm{N}(\widehat{\mathbf{g}})$ *é a concatenação das* $m+1$ *matrizes*

$$[\gamma_0|\ldots|\gamma_0]_{(n+1)\times r_0} + \mathrm{N}(\widehat{g_0}), \ldots, [\gamma_m|\ldots|\gamma_m]_{(n+1)\times r_m} + \mathrm{N}(\widehat{g_m}),$$

onde $\gamma_j := (\beta_0 - \beta_{0,j}, \ldots, \beta_n - \beta_{n,j})^t$ *e* r_j *é o número de termos não nulos de* g_j, $j = 0, \ldots, m$.

De fato, como $\mathrm{N}(\widehat{\mathbf{g}}) = [\widehat{N(\mathbf{g})}_0|\ldots|\widehat{N(\mathbf{g})}_m]$ e $\mathrm{N}(\widehat{g_j}) = \widehat{N(g_j)}$ basta verificarmos que

$$\widehat{N(\mathbf{g})}_j = [\gamma_j|\ldots|\gamma_j]_{(n+1)\times r_j} + \widehat{N(g_j)},$$

para todo $j = 0, \ldots, m$. Considere

$$\mathrm{N}(\mathbf{g}) = \begin{bmatrix}
\beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03} & \cdots & \beta_{0r_0} & \cdots & \beta_{0s_1} & \beta_{0s_2} & \beta_{0s_3} & \cdots & \beta_{0s_{r_m}} & \cdots \\
\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1r_0} & \cdots & \beta_{1s_1} & \beta_{1s_2} & \beta_{1s_3} & \cdots & \beta_{1s_{r_m}} & \cdots \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2r_0} & \cdots & \beta_{2s_1} & \beta_{2s_2} & \beta_{2s_3} & \cdots & \beta_{2s_{r_m}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
\beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \cdots & \beta_{nr_0} & \cdots & \beta_{ns_1} & \beta_{ns_2} & \beta_{ns_3} & \cdots & \beta_{ns_{r_m}} & \cdots
\end{bmatrix}$$

a matriz de Newton de $\mathbf{g}$, onde as colunas formadas pelos $\beta_{\lambda s_k}$ decorrem de g_j, com $\lambda = 0, \ldots, n$, $1 \le k \le r_j$, $s_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ e a quantidade dos s_k's sendo exatamente r_j. Como $\beta := (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ é o vetor diretriz de $\mathrm{N}(\mathbf{g})$ e $\widehat{N(\mathbf{g})}_j$ é a submatriz de $\widehat{N(\mathbf{g})}$ cujas colunas decorrem de g_j, temos

$$\widehat{N(\mathbf{g})}_j = \begin{bmatrix}
\beta_0 - \beta_{0s_1} & \beta_0 - \beta_{0s_2} & \beta_0 - \beta_{0s_3} & \cdots & \beta_0 - \beta_{0s_{r_m}} \\
\beta_1 - \beta_{0s_1} & \beta_1 - \beta_{0s_2} & \beta_1 - \beta_{0s_3} & \cdots & \beta_1 - \beta_{0s_{r_m}} \\
\beta_2 - \beta_{0s_1} & \beta_2 - \beta_{0s_2} & \beta_2 - \beta_{0s_3} & \cdots & \beta_2 - \beta_{0s_{r_m}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\beta_n - \beta_{ns_1} & \beta_n - \beta_{ns_2} & \beta_n - \beta_{ns_3} & \cdots & \beta_n - \beta_{ns_{r_m}}
\end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\mathrm{N}(g_j) = \begin{bmatrix}
\beta_{0s_1} & \beta_{0s_2} & \beta_{0s_3} & \cdots & \beta_{0s_{r_m}} \\
\beta_{0s_1} & \beta_{0s_2} & \beta_{0s_3} & \cdots & \beta_{0s_{r_m}} \\
\beta_{0s_1} & \beta_{0s_2} & \beta_{0s_3} & \cdots & \beta_{0s_{r_m}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\beta_{ns_1} & \beta_{ns_2} & \beta_{ns_3} & \cdots & \beta_{ns_{r_m}}
\end{bmatrix}$$

e como $(\beta_{0,j},\dots,\beta_{n,j})^t$ é o vetor diretriz de $\mathrm{N}(g_j)$, temos

$$\widehat{N(g_j)} = \begin{bmatrix} \beta_{0,j}-\beta_{0s_1} & \beta_{0,j}-\beta_{0s_2} & \beta_{0,j}-\beta_{0s_3} & \dots & \beta_{0,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \beta_{1,j}-\beta_{0s_1} & \beta_{1,j}-\beta_{0s_2} & \beta_{1,j}-\beta_{0s_3} & \dots & \beta_{1,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \beta_{2,j}-\beta_{0s_1} & \beta_{2,j}-\beta_{0s_2} & \beta_{2,j}-\beta_{0s_3} & \dots & \beta_{2,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,j}-\beta_{ns_1} & \beta_{n,j}-\beta_{ns_2} & \beta_{n,j}-\beta_{ns_3} & \dots & \beta_{n,j}-\beta_{ns_{r_m}} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[\gamma_j|\dots|\gamma_j]_{(n+1)\times r_j} + \widehat{N(g_j)} = \begin{bmatrix} \beta_0-\beta_{0,j} & \beta_0-\beta_{0,j} & \beta_0-\beta_{0,j} & \dots & \beta_0-\beta_{0,j} \\ \beta_1-\beta_{1,j} & \beta_1-\beta_{1,j} & \beta_1-\beta_{1,j} & \dots & \beta_1-\beta_{1,j} \\ \beta_2-\beta_{2,j} & \beta_2-\beta_{2,j} & \beta_2-\beta_{2,j} & \dots & \beta_2-\beta_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n-\beta_{n,j} & \beta_n-\beta_{n,j} & \beta_n-\beta_{n,j} & \dots & \beta_n-\beta_{n,j} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{0,j}-\beta_{0s_1} & \beta_{0,j}-\beta_{0s_2} & \beta_{0,j}-\beta_{0s_3} & \dots & \beta_{0,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \beta_{1,j}-\beta_{0s_1} & \beta_{1,j}-\beta_{0s_2} & \beta_{1,j}-\beta_{0s_3} & \dots & \beta_{1,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \beta_{2,j}-\beta_{0s_1} & \beta_{2,j}-\beta_{0s_2} & \beta_{2,j}-\beta_{0s_3} & \dots & \beta_{2,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,j}-\beta_{nr'_1} & \beta_{n,j}-\beta_{nr'_2} & \beta_{n,j}-\beta_{nr'_3} & \dots & \beta_{n,j}-\beta_{ns_{r_m}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0-\beta_{0,j}+\beta_{0,j}-\beta_{0s_1} & \beta_0-\beta_{0,j}+\beta_{0,j}-\beta_{0s_2} & \dots & \beta_0-\beta_{0,j}+\beta_{0,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \beta_1-\beta_{1,j}+\beta_{1,j}-\beta_{0s_1} & \beta_1-\beta_{1,j}+\beta_{1,j}-\beta_{0s_2} & \dots & \beta_1-\beta_{1,j}+\beta_{1,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \beta_2-\beta_{2,j}+\beta_{2,j}-\beta_{0s_1} & \beta_2-\beta_{2,j}+\beta_{2,j}-\beta_{0s_2} & \dots & \beta_2-\beta_{2,j}+\beta_{2,j}-\beta_{0s_{r_m}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_n-\beta_{n,j}+\beta_{n,j}-\beta_{ns_1} & \beta_n-\beta_{n,j}+\beta_{n,j}-\beta_{ns_2} & \dots & \beta_n-\beta_{n,j}+\beta_{n,j}-\beta_{ns_{r_m}} \end{bmatrix} = \widehat{N(\mathbf{g})}_j,$$

como queríamos.
Portanto, da Afirmação 2.2.13, temos $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\beta_0}\cdots x_n^{d-\beta_n}\widehat{\mathbf{g}}$. □

O próximo resultado é uma generalização da Proposição 2.2.10 para o caso em que avaliamos um conjunto de formas no dual de Newton de outro conjunto com $n+1$ $(=\dim R)$ formas de mesmo grau (ao invés de um conjunto de monômios, como era o caso no resultado anterior).

Proposição 2.2.14. *Seja $\mathbf{g} := \{g_0,\dots,g_m\} \subset R$ um conjunto arbitrário de formas com grau $d \geq 1$ e $\mathbf{h} := \{h_0,\dots,h_n\} \subset R$ um conjunto de $n+1$ $(=\dim R)$ formas com um grau fixo $s \geq 1$. Então,*

$$\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{h}}) = x_0^{d\alpha_0-\beta_0}\cdots x_n^{d\alpha_n-\beta_n}\widehat{\mathbf{g}(\mathbf{h})},$$

onde $\alpha := (\alpha_0,\dots,\alpha_n)^t$ e $\beta := (\beta_0,\dots,\beta_n)^t$ são os vetores diretriz de $\mathrm{N}(\mathbf{h})$ e $\mathrm{N}(\mathbf{g}(\mathbf{h}))$, respectivamente.

Demonstração. Usando o Teorema 2.2.12, trocando $\mathbf{g}$ por $\mathbf{h}$, obtemos

$$\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{s-\alpha_0}\cdots x_n^{s-\alpha_n}\widehat{\mathbf{h}}.$$

Aplicando $\mathbf{g}$ na equação acima, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}})) &= \mathbf{g}(x_0^{s-\alpha_0}\cdots x_n^{s-\alpha_n}\widehat{\mathbf{h}}) \\
&= \{g_0(x_0^{s-\alpha_0}\cdots x_n^{s-\alpha_n}\widehat{\mathbf{h}}),\ldots,g_m(x_0^{s-\alpha_0}\cdots x_n^{s-\alpha_n}\widehat{\mathbf{h}})\} \\
&= \{x_0^{d(s-\alpha_0)}\cdots x_n^{d(s-\alpha_n)}g_0(\widehat{\mathbf{h}}),\ldots,x_0^{d(s-\alpha_0)}\cdots x_n^{d(s-\alpha_n)}g_m(\widehat{\mathbf{h}})\} \\
&= x_0^{d(s-\alpha_0)}\cdots x_n^{d(s-\alpha_n)}\{g_0(\widehat{\mathbf{h}}),\ldots,g_m(\widehat{\mathbf{h}})\} \\
&= x_0^{ds-d\alpha_0}\cdots x_n^{ds-d\alpha_n}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{h}}).
\end{aligned}$$

Note que, na terceira igualdade, colocamos o monômio em evidência, pois $\mathbf{g}$ é um conjunto de formas de grau d (a grosso modo, o que está acontecendo é que o mesmo monômio aparecerá em todos os termos das $g_i's$).

Daí, temos

$$\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{h}}) = (x_0^{ds-d\alpha_0}\cdots x_n^{ds-d\alpha_n})^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}})) = (x_0^{ds-d\alpha_0}\cdots x_n^{ds-d\alpha_n})^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{h}))(\widehat{\mathbf{x}}). \tag{2.7}$$

Como $\mathbf{g}(\mathbf{h})$ é um conjunto de formas de grau ds, utilizando novamente o Teorema 2.2.12, trocando $\mathbf{g}$ por $\mathbf{g}(\mathbf{h})$, obtemos

$$(\mathbf{g}(\mathbf{h}))(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{ds-\beta_0}\cdots x_n^{ds-\beta_n}\widehat{(\mathbf{g}(\mathbf{h}))}. \tag{2.8}$$

Portanto, das equações 2.7 e 2.8, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{h}}) &= (x_0^{ds-d\alpha_0}\cdots x_n^{ds-d\alpha_n})^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{h}))(\widehat{\mathbf{x}}) \\
&= (x_0^{ds-d\alpha_0}\cdots x_n^{ds-d\alpha_n})^{-1}x_0^{ds-\beta_0}\cdots x_n^{ds-\beta_n}\widehat{(\mathbf{g}(\mathbf{h}))} \\
&= x_0^{ds-\beta_0-(ds-d\alpha_0)}\cdots x_n^{ds-\beta_n-(ds-d\alpha_n)}\widehat{(\mathbf{g}(\mathbf{h}))} \\
&= x_0^{ds-\beta_0-ds+d\alpha_0}\cdots x_n^{ds-\beta_n-ds+d\alpha_n}\widehat{(\mathbf{g}(\mathbf{h}))} \\
&= x_0^{d\alpha_0-\beta_0}\cdots x_n^{d\alpha_n-\beta_n}\widehat{(\mathbf{g}(\mathbf{h}))}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.15. *Seja $\mathbf{g} := \{g_0,\ldots,g_m\} \subset R$ um conjunto de formas de mesmo grau satisfazendo as restrições canônicas. Então, $k[\mathbf{g}]$ e $k[\widehat{\mathbf{g}}]$ são isomorfas como k-álgebras.*

Demonstração. Segue das seguintes aplicações

$$\begin{aligned}
\varphi\colon\ k[\mathbf{y}] &\twoheadrightarrow k[\mathbf{g}] \\
\mathrm{F} &\mapsto \mathrm{F}(\mathbf{g})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi\colon\ k[\mathbf{y}] &\twoheadrightarrow k[\widehat{\mathbf{g}}], \\
\mathrm{G} &\mapsto \mathrm{G}(\widehat{\mathbf{g}})
\end{aligned}$$

os seguintes isomorfismos:

$$k[\mathbf{g}] \simeq k[\mathbf{y}]/\mathrm{J} \text{ e } k[\widehat{\mathbf{g}}] \simeq k[\mathbf{y}]/\mathrm{W},$$

onde $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{J}$ e $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{W}$. Então, nosso objetivo é mostrar que $\mathrm{J} = \mathrm{W}$ e, assim, concluiremos o resultado.

Antes de mostrarmos a igualdade, note que

$$\mathrm{F} \in \mathrm{J} \Leftrightarrow \varphi(\mathrm{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{F}(\mathbf{g}) = 0$$
e
$$\mathrm{G} \in \mathrm{W} \Leftrightarrow \psi(\mathrm{G}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{G}(\widehat{\mathbf{g}}) = 0.$$

Agora, provemos a igualdade.

Seja $\mathrm{F}(\mathbf{y}) \in k[\mathbf{y}] := k[y_0, \dots, y_m]$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $\mathrm{F}(\mathbf{g}) = 0$. Como temos a dualidade $\widehat{\widehat{\mathbf{g}}} = \mathbf{g}$ e $\mathbf{g}$ satisfaz as restrições canônicas, aplicando o Teorema 2.2.12 para o dual de Newton $\widehat{\mathbf{g}}$, temos

$$\widehat{\mathbf{g}}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathrm{M}\widehat{\widehat{\mathbf{g}}} = \mathrm{M}\mathbf{g},$$

para um monômio adequado $\mathrm{M} \in \mathrm{R}$. Portanto,

$$\mathrm{F}(\widehat{\mathbf{g}}(\widehat{\mathbf{x}})) = \mathrm{F}(\mathrm{M}\mathbf{g}) = \mathrm{M}^d\mathrm{F}(\mathbf{g}) = 0.$$

Note que $\mathrm{F}(\widehat{\mathbf{g}}(\widehat{\mathbf{x}})) = \mathrm{F}(\widehat{\mathbf{g}})(\widehat{\mathbf{x}})$, e isto nos diz que a forma $\mathrm{F}(\widehat{\mathbf{g}})$ aplicada nas formas de $\widehat{\mathbf{x}}$ se anulam. Como $\widehat{\mathbf{x}} = \{x_1 \cdots x_n, \dots, x_0 \cdots \underline{x_i} \cdots x_n, \dots, x_0 \cdots x_{n-1}\}$ é algebricamente independente sobre k, segue que $\mathrm{F}(\widehat{\mathbf{g}}) = 0$. Logo, $\mathrm{J} \subset \mathrm{W}$.

Agora, seja $\mathrm{G}(\mathbf{y}) \in k[\mathbf{y}] := k[y_0, \dots, y_m]$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $\mathrm{G}(\widehat{\mathbf{g}}) = 0$. Então, aplicando o Teorema 2.2.12 para $\mathbf{g}$, temos

$$\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathrm{N}\widehat{\mathbf{g}},$$

para um monômio adequado $\mathrm{N} \in \mathrm{R}$. Portanto,

$$\mathrm{G}(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})) = \mathrm{G}(\mathrm{N}\widehat{\mathbf{g}}) = \mathrm{N}^d\mathrm{G}(\widehat{\mathbf{g}}) = 0.$$

Analogamente ao caso anterior, temos que $\mathrm{G}(\mathbf{g}) = 0$, ou seja, $\mathrm{W} \subset \mathrm{J}$. Daí, a igualdade segue e temos o isomorfismo desejado. $\square$

Corolário 2.2.16. *Seja* $\mathbf{g} = \{g_0, \dots, g_m\} \subset R := k[x_0, \dots, x_n]$ $(m \geq 1, n \geq 1)$ *um conjunto de formas arbitrárias de mesmo grau e seja* $\widehat{\mathbf{g}}$ *seu dual complementar de Newton. Então,*

(a) $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})$ *e* $\widehat{\mathbf{g}}$ *definem a mesma aplicação racional;*

(b) Se $\mathbf{g}$ *define uma aplicação birracional sobre sua imagem então* $\widehat{\mathbf{g}}$ *também será e ambas aplicações birracionais terão a mesma imagem.*

Demonstração.

(a) Considere $\widehat{\mathbf{g}} = \{f_0, \dots, f_m\}$ e $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = \{h_0, \dots, h_m\}$. Então, pelo Teorema 2.2.12, temos $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = M\widehat{\mathbf{g}}$, para algum monômio adequado $\mathrm{M} \in \mathrm{R}$. Assim, considerando $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})$ e $M\widehat{\mathbf{g}}$ $(m+1)$-uplas, temos

$$(h_0, \dots, h_m) = \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = M\widehat{\mathbf{g}} = (Mf_0, \dots, Mf_m).$$

Logo, $h_i = Mf_i$, para todo $i = 0, \dots, m$. Daí, as $(m+1)$-uplas $(f_0, \dots, f_m)$ e $(h_0, \dots, h_m)$ são equivalentes e, portanto, $(f_0 : \dots : f_m)$ e $(h_0 : \dots : h_m)$ definem a mesma aplicação racional.

(b) $\widehat{\mathbf{g}}$ é birracional: De fato, como $\widehat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{g}$ são aplicações birracionais, então $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})$ é também birracional, já que composição de birracionais é birracional. Agora, como $\widehat{\mathbf{g}}$ e $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})$ definem a mesma aplicação racional (pelo item (a)), segue o desejado.

$\mathbf{g}$ e $\widehat{\mathbf{x}}$ possuem a mesma imagem: Basta notarmos que como $\widehat{\mathbf{g}}$ e $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})$ definem a mesma aplicação racional, pelo Colorário 2.2.15, temos que o anel de coordenadas homogêneas de $k[\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})]$ é isomorfo ao de $k[\widehat{\mathbf{g}}]$. Daí, segue que elas possuirão a mesma imagem. $\square$

Definição 2.2.17. *Seja $\mathfrak{F} = (f_0 : \ldots : f_n)$ uma aplicação Cremona e $\mathbf{f}' = \{f'_0 : \ldots : f'_n\}$ a representação de sua aplicação inversa tal que mdc($f'_0, \ldots, f'_n$) = 1. Então, existe uma forma $D \in R$ unicamente definida tal que $f'_i(f_0, \ldots, f_n) = x_i D$. Chamamos D o* ***fator inversão*** *de $\mathfrak{F}$.*

Exemplo 2.2.18. Considerando a aplicação racional do Exemplo 1.2.10:

$$\mathfrak{H} = (qx : qy : y^3 : y^2 z)$$

cujo inverso é

$$\mathfrak{H}^{-1} = (xz : yz : yw : -xw + y^2)$$

temos que o fator inversão de $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{H}^{-1}$ são $xy^3z + y^4w$ e y^3z^2, respectivamente. Ou seja, $h_i \circ \mathfrak{H}^{-1} = y_i\mathrm{D}$ e $h'_i \circ \mathfrak{H} = x_i\mathrm{C}$, para todo $i = 0, \ldots, 3$, onde $\mathrm{C} = xy^3z + y^4w$ e $\mathrm{D} = y^3z^2$.

Corolário 2.2.19. *Seja $\mathfrak{F}\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ uma aplicação Cremona, $\widehat{\mathfrak{F}}$ o correspondente dual de Newton da aplicação Cremona obtida via o Corolário* 2.2.16 (b) *e $\mathfrak{M}$ a involução recíproca de Magnus. Então:*

(i) $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{M}$ e $(\widehat{\mathfrak{F}})^{-1} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}^{-1}$;

(ii) $\widehat{\mathfrak{F}^{-1}} = (\widehat{\mathfrak{F}})^{-1}$ se, e somente se, $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{M}$. Em particular, se $\mathfrak{F}$ é uma aplicação Cremona monomial, então $\widehat{\mathfrak{F}^{-1}} = (\widehat{\mathfrak{F}})^{-1}$;

(iii) Seja C, $D \in k[\mathbf{x}]$ os fatores de inversão de $\mathfrak{F}$ e $\widehat{\mathfrak{F}}$, respectivamente. Então,

$$\Gamma_1(\widehat{C})^n = \mathrm{q}_1\mathrm{D} \text{ e } \Gamma_2(\widehat{D})^n = \mathrm{q}_2\mathrm{C},$$

onde Γ_1, Γ_2, q_1, $q_2 \in k[\mathbf{x}]$, com Γ_1 e Γ_2 monômios.

Demonstração.

i) Pelo item a) do Corolário 2.2.16, $\mathfrak{F}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathfrak{F} \circ \widehat{\mathbf{x}}$ e $\widehat{\mathfrak{F}}$ definem a mesma aplicação racional. Como $\mathfrak{M}$ é a aplicação racional definida pelo conjunto de formas $\widehat{\mathbf{x}}$, temos $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{M}$, a menos de multiplicação por um monômio adequado.

Agora, note que $(\widehat{\mathfrak{F}})^{-1} = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{M})^{-1} = \mathfrak{M}^{-1} \circ \mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}^{-1}$, onde a última igualdade segue do fato que o inverso da involução recíproca de Magnus é ela própria.

ii) Utilizando o item anterior e o fato de que o inverso da involução recíproca de Magnus é ela própria, temos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{M} &\Leftrightarrow (\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F})^{-1} = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{M})^{-1} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}^{-1} \circ \mathfrak{F}^{-1} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}^{-1} \\
&\Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{F}^{-1}} = (\widehat{\mathfrak{F}})^{-1}
\end{aligned}$$

Em particular, como o subgrupo formado por todas aplicações Cremona monomiais satisfaz a propriedade $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{M}$, obtemos o desejado.

iii) Inicialmente, provaremos a primeira igualdade. Sejam $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_n\}$ e $\mathbf{g}' = \{g'_0, \ldots, g'_n\}$ as representações de $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{-1}$, respectivamente, satisfazendo $\mathrm{mdc}(g_0, \ldots, g_n) = \mathrm{mdc}(g'_0, \ldots, g'_n) = 1$. Assim, pela Definição 2.2.17, temos $g'_i(g_0, \ldots, g_n) = x_i\mathrm{C}$, para todo $i = 0, \ldots, n$. Pelo Teorema 2.2.12, $\widehat{\mathbf{g}} = \frac{1}{M}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})$, onde M é um monômio adequado. Seja $\mathbf{h} = \{h_0, \ldots, h_n\}$ a representação de $(\widehat{\mathfrak{F}})^{-1}$ tais que $\mathrm{mdc}\{h_0, \ldots, h_n\} = 1$. Assim, $h_i(\widehat{\mathbf{g}}) = x_i\mathrm{D}$, para todo $i = 0, \ldots, n$. Das seguintes igualdades $(\mathbf{g}') = \mathfrak{F}^{-1}$ e $(\mathbf{h}) = (\widehat{\mathfrak{F}})^{-1}$ e pelo item i) desse corolário, temos $p\mathbf{h} = \widehat{\mathbf{x}}(\mathbf{g}')$, para alguma forma p adequada. Daí, $\mathbf{h} = \frac{1}{p}\widehat{\mathbf{x}}(\mathbf{g}')$. Como $p\mathbf{h} = \{ph_0, \ldots, ph_n\}$ e $\widehat{\mathbf{x}}(\mathbf{g}') = \{\widehat{x_0}(g'_0, \ldots, g'_n), \ldots, \widehat{x_n}(g'_0, \ldots, g'_n)\}$, em particular,

$$h_0 \;=\; \left(\frac{1}{p}\right)\widehat{x_0}(g'_0,\,\ldots\,,g'_n) = \left(\frac{1}{p}\right) g'_1 \cdots g'_n.$$

Portanto, para algum inteiro não negativo s,

$$\begin{aligned}
x_0D &= h_0(\widehat{\mathbf{g}}) \\
&= \left(\frac{1}{p}g'_1 \cdots g'_n\right) \circ \left(\frac{1}{M}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})\right) \\
&= \frac{1}{M^s}\left[\left(\frac{1}{p}g'_1 \cdots g'_n\right) \circ \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})\right] \quad \text{(s é o maior grau tal que 1/M aparece em todos os termos)} \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[(g'_1 \cdots g'_n) \circ \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})] \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[(g'_1 \cdots g'_n) \circ \mathbf{g} \circ \widehat{\mathbf{x}}] \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[(g'_1 \cdots g'_n)(\mathbf{g}) \circ \widehat{\mathbf{x}}] \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[(g'_1(\mathbf{g}) \cdots g'_n(\mathbf{g})) \circ \widehat{\mathbf{x}}] \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[(x_1C \cdots x_nC) \circ \widehat{\mathbf{x}}] \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[(x_1 \cdots x_nC^n) \circ \widehat{\mathbf{x}}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[x_1(\widehat{\mathbf{x}})\cdots x_n(\widehat{\mathbf{x}})C^n(\widehat{\mathbf{x}})] \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[(x_0x_2x_3\cdots x_n)(x_0x_1x_3\cdots x_n)\cdots(x_0x_1x_2\cdots x_{n-1})C^n(\widehat{\mathbf{x}})] \\
&= \frac{1}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[x_0^n x_1^{n-1}x_2^{n-1}\cdots x_n^{n-1}C^n(\widehat{\mathbf{x}})] \\
&= \frac{x_0^n x_1^{n-1}x_2^{n-1}\cdots x_n^{n-1}}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[C(\widehat{\mathbf{x}})]^n \\
&= \frac{x_0^n x_1^{n-1}x_2^{n-1}\cdots x_n^{n-1}}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}[x_0^{d-\beta_0}\cdots x_n^{d-\beta_n}\widehat{C}]^n \quad \text{(pela Proposição 2.2.10 aplicada em C)} \\
&= \frac{x_0^{n+nd-n\beta_0}x_1^{n-1+nd-n\beta_1}x_2^{n-1+nd-n\beta_2}\cdots x_n^{n-1+nd-n\beta_n}}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}(\widehat{C})^n,
\end{aligned}
$$

onde $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$ é o vetor diretriz de C e $d = \mathrm{gr}(\mathrm{C})$.

Note que a $4^{\underline{a}}$ igualdade acima segue do fato que:

$$\left(\frac{1}{p}g_1'\cdots g_n'\right)\circ\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = \left(\frac{1}{p}\right)(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))g_1'(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))\cdots g_n'(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})) = \left(\frac{1}{p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}\right)g_1'(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))\cdots g_n'(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})).$$

Daí, temos

$$D = \frac{x_0^{n-1+nd-n\beta_0}x_1^{n-1+nd-n\beta_1}x_2^{n-1+nd-n\beta_2}\cdots x_n^{n-1+nd-n\beta_n}}{M^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))}(\widehat{C})^n.$$

Tomando $q_1 = \mathrm{M}^s p(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))$ e $\Gamma_1 = x_0^{n-1+nd-n\beta_0}x_1^{n-1+nd-n\beta_1}x_2^{n-1+nd-n\beta_2}\cdots x_n^{n-1+nd-n\beta_n}$, temos

$$\Gamma_1(\widehat{C})^n = q_1 D. \tag{2.9}$$

Agora, como já provamos uma das igualdades, considere C' e D' os fatores de inversão de $\widehat{\mathfrak{F}}$ e $\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}}$. Então, da equação 2.9, temos

$$\Gamma_1(\widehat{C'})^n = q_1 D'.$$

Mas, por outro lado, $C' = D$ e $D' = C$ (pela dualidade $\widehat{\widehat{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{F}$). Assim, tomando $\Gamma_2 = \Gamma_1$ e $q_2 = q_1$, temos

$$\Gamma_2(\widehat{D})^n = q_2 C,$$

como queríamos. □

Note que dados dois conjuntos de formas $\mathbf{p} = \{p_0, \ldots, p_m\}$ e $\mathbf{q} = \{q_0, \ldots, q_m\} \subset \mathrm{R}$, ambos de mesmo grau, escrevemos $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ como sendo o conjunto das formas obtidas pela adição das $(m+1)$-uplas $(p_0, \ldots, p_m)$ e $(q_0, \ldots, q_m)$, coordenada a coordenada, ou seja, $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ $= \{p_0 + q_0, \ldots, p_m + q_m\}$. Pelo Corolário 2.2.11 temos que dadas duas formas, o dual de Newton do produto era o produto dos respectivos dual de cada forma. Com a adição isso não ocorre, mas conseguiremos uma relação próxima no seguinte resultado:

Corolário 2.2.20. *Seja* $\mathbf{p} = \{p_0, \ldots, p_m\}$ *e* $\boldsymbol{q} = \{q_0, \ldots, q_m\} \subset R$ *dois conjuntos de formas, ambas com mesmo grau d. Então,*

$$(x_0^{d-\gamma_0} \cdots x_n^{d-\gamma_n})\widehat{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = (x_0^{d-\alpha_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n})\widehat{\mathbf{p}} + (x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n})\widehat{\mathbf{q}},$$

onde $\gamma := (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)^t$, $\alpha := (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)^t$, *e* $\beta := (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ *são os vetores diretriz de* $\mathrm{N}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$, $\mathrm{N}(\mathbf{p})$ *e* $\mathrm{N}(\mathbf{q})$, *respectivamente.*

Demonstração. Note que

$$\mathbf{p}(\widehat{\mathbf{x}}) + \mathbf{q}(\widehat{\mathbf{x}}) \quad = \quad (\mathbf{p}+\mathbf{q})(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Assim, aplicando o Teorema 2.2.12 para $\mathbf{p}(\widehat{\mathbf{x}})$, $\mathbf{q}(\widehat{\mathbf{x}})$ e $(\mathbf{p}+\mathbf{q})(\widehat{\mathbf{x}})$, temos

$$\begin{aligned}
(x_0^{d-\gamma_0} \cdots x_n^{d-\gamma_n})\widehat{\mathbf{p}+\mathbf{q}} &= (\mathbf{p}+\mathbf{q})(\widehat{\mathbf{x}}) \\
&= \mathbf{p}(\widehat{\mathbf{x}}) + \mathbf{q}(\widehat{\mathbf{x}}) \\
&= (x_0^{d-\alpha_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n})\widehat{\mathbf{p}} + (x_0^{d-\beta_0} \cdots x_n^{d-\beta_n})\widehat{\mathbf{q}},
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo exploraremos duas aplicações do Dual complementar de Newton. Entretanto, antes, desenvolveremos um pouco mais a teoria fazendo uma analogia com alguns resultados do capítulo anterior, já que estaremos trabalhando com um anel bigraduado. A primeira dessas aplicações relaciona as Álgebras de Rees de um conjunto de formas $\mathbf{g}$ e a do seu dual via uma aplicação, do anel bigraduado $\mathrm{R}[\mathbf{y}]$, que não é um homomorfismo de anéis, mas é bem próximo a isso. Já, na seção seguinte, conheceremos as aplicações Cremonas de tipo Jonquières. Esse tipo de aplicação terá uma representação bem particular. Além disso, veremos a nossa última aplicação do Dual complementar de Newton, a qual será uma preservação de propriedade, ou seja, dada qualquer aplicação Cremona $\mathfrak{F}$ de tipo Jonquières, o seu dual também será. Destacamos que a referência base para esse capítulo foi [6] e os principais resultados são o Teorema 3.1.7 e a Proposição 3.2.3.

3.1 Álgebra de Rees

Seja $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_m\} \subset \mathrm{R} = k[\mathbf{x}] = k[x_0, \ldots, x_n]$ um conjunto de formas de mesmo grau, $\mathrm{R}[\mathbf{y}] := \mathrm{R}[y_0, \ldots, y_m]$ o anel de polinômios sobre R com a bigraduação usual e $p \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$ um polinômio bihomogêneo de bigrau $(d_{\mathrm{x}}, d_{\mathrm{y}})$. Na Seção 1.3 do Capítulo 1, foi observado que podemos escrever

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{|\mathbf{a}|=d_{\mathbf{x}} \\ |\mathbf{b}|=d_{\mathbf{y}}}} c_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mathbf{y}^{\mathbf{b}},$$

onde $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_m)$.

Como na Seção 2.1, seja $\mathbf{c}(p)$ o quadro de coeficientes de p (vetor dos coeficientes não nulos $c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ de p) em uma ordem fixada e $\mathrm{N}_{\mathbf{x}}(p)$ (respectivamente, $\mathrm{N}_{\mathbf{y}}(p)$) a matriz de Newton cujas colunas são os vetores expoentes dos correspondentes x-termos (respectivamente, y-termos) na mesma ordem. Assim, podemos escrever

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = < \mathbf{c}(p), \mathbf{x}^{N_{\mathbf{x}}(p)} \mathbf{y}^{N_{\mathbf{y}}(p)} >$$

e a chamamos de *representação de Newton* de p em analogia ao caso homogêneo.

O seguinte resultado é uma analogia da Proposição 2.2.10 para polinômios bihomogêneos.

Lema 3.1.1. *Seja* $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$ *uma forma bihomogênea tal que* $d_{\mathbf{x}} \geq 1$. *Então,*

$$p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) = x_0^{d_x-\beta_0} \cdots x_n^{d_x-\beta_n} < \mathbf{c}(p), \mathbf{x}^{\widehat{N_{\mathbf{x}}(p)}} \mathbf{y}^{N_{\mathbf{y}}(p)} >,$$

onde $\beta := (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ *é o vetor diretriz de* $N_{\mathbf{x}}(p)$ *e* $\widehat{\mathbf{x}}$ *é o dual complementar de Newton do conjunto* $\mathbf{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

Demonstração. Denote $\mathrm{P}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x},\mathbf{y})$ como um elemento de $\mathrm{K}[\mathbf{x}]$, onde $\mathrm{K} = k(\mathbf{y})$ é o corpo de frações de $k[\mathbf{y}]$. Assim, uma vez que estamos considerando $p(\mathbf{x},\mathbf{y})$ apenas na variável $\mathbf{x}$, $\mathrm{P}(\mathbf{x})$ é uma forma homogênea em $\mathrm{K}[\mathbf{x}]$. Aplicando a Proposição 2.2.10 em $\mathrm{P}(\mathbf{x})$, temos

$$\mathrm{P}(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d_x-\beta_0} \cdots x_n^{d_x-\beta_n} \widehat{P(\mathbf{x})},$$

já que β é o vetor diretriz de $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = N_{\mathbf{x}}(p)$.

Basta mostrarmos que

$$\widehat{P(\mathbf{x})} = < \mathbf{c}(p), \mathbf{x}^{\widehat{N_{\mathbf{x}}(p)}} \mathbf{y}^{N_{\mathbf{y}}(p)} >.$$

De fato,

$$\widehat{P(\mathbf{x})} =< \mathbf{c}(\widehat{P(\mathbf{x})}), \mathbf{x}^{N(\widehat{P(\mathbf{x})})} > . \tag{3.1}$$

Como $\mathbf{c}(\widehat{P(\mathbf{x})}) = \mathbf{c}(P(\mathbf{x}))$ e $N(P(\mathbf{x})) = N_{\mathbf{x}}(p(\mathbf{x},\mathbf{y})) = N_{\mathbf{x}}(p)$, a equação 3.1 torna-se

$$\widehat{P(\mathbf{x})} =< \mathbf{c}(P(\mathbf{x})), \mathbf{x}^{\widehat{N_{\mathbf{x}}(p)}} > . \tag{3.2}$$

Observe que, $\mathbf{c}(P(\mathbf{x}))$ é o quadro de coeficientes de $\mathrm{P}(\mathbf{x})$ sobre K e os elementos, na ordem estabelecida, são os termos da forma $c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$. Então, considerando $\mathrm{P}(\mathbf{x})$ nas variáveis originais, utilizando a definição da matriz de Newton $N_{\mathbf{y}}(p)$ e considerando o fato de nada ter sido alterado na variável $\mathbf{y}$ de $p(\mathbf{x},\mathbf{y})$, a equação 3.2 se torna

$$\widehat{P(\mathbf{x})} =< \mathbf{c}(p), \mathbf{x}^{\widehat{N_{\mathbf{x}}(p)}} \mathbf{y}^{N_{\mathbf{y}}(p)} >,$$

como queríamos. □

Observação 3.1.2. Antes de enunciarmos o próximo resultado, notemos que, para uma forma bihomogênea $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$ de bigrau $(d_{\mathbf{x}},d_{\mathbf{y}})$,

$$p(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})) = p(\mathbf{x}, \mathbf{g})(\widehat{\mathbf{x}}),$$

onde $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_m\} \subset \mathrm{R}$ um conjunto de formas de mesmo grau e $\widehat{\mathbf{x}}$ é a involução recíproca de Magnus. Observe que é suficiente visualizarmos a igualdade acima para uma forma bihomogênea do tipo monomial e o caso geral seguirá por adição.

Considere $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$ um monômio de bigrau $(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Então,

$$\begin{aligned} p(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})) &= c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\widehat{\mathbf{x}})^{\mathbf{a}}(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}))^{\mathbf{b}} \\ &= (p(\mathbf{x}, \mathbf{g}))(\widehat{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que $p(\mathbf{x},\mathbf{g}) = c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{g}^{\mathbf{b}}$, $\mathbf{g}$ é um conjunto de formas em $k[\mathbf{x}]$ e, assim, podemos considerar o monômio p nas variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{g}$ avaliado em $\widehat{\mathbf{x}}$.

Lema 3.1.3. *Seja* $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_m\} \subset R$ *um conjunto de formas de mesmo grau e* $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$ *uma forma bihomogênea de bigrau* $(d_{\mathbf{x}},d_{\mathbf{y}})$. *Se* $p(\mathbf{x},\mathbf{g}) = 0$ *então* $p(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{g}}) = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.12, existe um monômio adequado $\mathrm{M} \in k[\mathbf{x}]$ tal que $\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathrm{M}\widehat{\mathbf{g}}$. Assim,

$$\begin{aligned} p(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{g}}) &= p\left(\widehat{\mathbf{x}}, \frac{\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})}{M}\right) \\ &= \frac{1}{M^{d_{\mathbf{y}}}} p(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}})) \\ &= \frac{1}{M^{d_{\mathbf{y}}}} p(\mathbf{x}, \mathbf{g})(\widehat{\mathbf{x}}) \quad \text{(pela Observação 3.1.2).} \end{aligned}$$

Por hipótese, $p(\mathbf{x},\mathbf{g}) = 0$, assim $p(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{g}}) = 0$. □

Observação 3.1.4. Até o momento só definimos o dual de Newton para formas com grau positivo, ambas Proposição 2.2.10 e o Lema 3.1.1 requerem essa suposição. Sendo assim, convecionaremos que para uma biforma p de grau zero em $\mathbf{x}$, $\mathrm{N}_{\mathbf{x}}(p)$ é a matriz nula. Dessa forma, o lema acima também é válido no caso em que $d_{\mathbf{x}} = 0$, caso em que recuperaremos a representação de Newton de uma forma em $k[\mathbf{y}]$ (já que na demonstração do Lema 3.1.1 nada foi alterado na variável $\mathbf{y}$ de p).

Com essa convenção e a notação do Lema 3.1.1, introduziremos a seguinte aplicação do anel bigraduado usual $k[\mathbf{x},\mathbf{y}]$:

Definição 3.1.5. *Seja* $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$ *uma forma bihomogênea. Definimos a seguinte função*

$$\psi(p) := < \mathbf{c}(p), \mathbf{x}^{\widehat{N_{\mathbf{x}}(p)}} \mathbf{y}^{N_{\mathbf{y}}(p)} > = (x_0^{d_x - \beta_0} \cdots x_n^{d_x - \beta_n})^{-1} p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}).$$

A definição de ψ é estendida naturalmente a todo $k[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ usando a decomposição em soma direta

$$k[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{N}} k[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_{a,b},$$

onde $k[\mathbf{x},\mathbf{y}]_{a,b}$ denota o k-espaço vetorial gerado pelos polinômios bihomogêneos de bigrau (a, b).

Note que, com a convenção da Observação 3.1.4, temos $\psi(q) = q$, para qualquer forma homogênea $q \in k[\mathbf{y}]$. Em outras palavras, a restrição de ψ a k-subálgebra $k[\mathbf{y}]$ é a aplicação identidade.

Infelizmente, ψ não é um homomorfismo de anéis, mas é bem próximo. O seguinte resultado mostrará claramente.

Lema 3.1.6. *Sejam* $p, q \in k[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ *polinômios bihomogêneos. Então, vale as seguintes condições:*

(i) $M\psi(p + q) = M_1\psi(p) + M_2\psi(q)$, *onde* M, M_1 *e* M_2 *são monômios adequados em* $k[\mathbf{x}]$;

(ii) $M\psi(pq) = M'\psi(p)\psi(q)$, *onde* M *e* M' *são monômios adequados em* $k[\mathbf{x}]$.

Demonstração. Se p e q possuem bigraus diferentes então não há nada a fazer, já que estas biformas pertencem a componentes diferentes da bigraduação de $k[\mathbf{x},\mathbf{y}]$. Sendo assim, suponha que eles possuem o mesmo bigrau. Denotando $g = p + q$, $h = pq$ e considerando eles em $\mathrm{K}[\mathbf{x}]$, como no Lema 3.1.1, note que

$$\begin{aligned}(p+q)(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = p(\mathbf{x},\mathbf{y}) + q(\mathbf{x},\mathbf{y}),\\ (pq)(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = p(\mathbf{x},\mathbf{y})q(\mathbf{x},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Daí, temos

$$(p+q)(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) = p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) + q(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) \text{ e } (pq)(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) = p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y})q(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}). \tag{3.3}$$

Da Definição 3.1.5 e do Lema 3.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}\psi(p+q) &= \mathrm{M}_1^{-1}(p+q)(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}),\\ \psi(p) &= \mathrm{M}_2^{-1}p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}),\\ \psi(q) &= \mathrm{M}_3^{-1}q(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}),\\ \psi(pq) &= \mathrm{M}_4^{-1}(pq)(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}),\end{aligned}$$

onde M_1, M_2, $\mathrm{M}_3 \in k[\mathbf{x}]$ são monômios adequados. Assim,

$$\begin{aligned}(p+q)(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) &= \mathrm{M}_1\psi(p+q),\\ p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) &= \mathrm{M}_2\psi(p),\\ q(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) &= \mathrm{M}_3\psi(q),\\ (pq)(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) &= \mathrm{M}_4\psi(pq).\end{aligned}$$

Logo, das equações 3.3, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_1\psi(p+q) &= \mathrm{M}_2\psi(p) + \mathrm{M}_3\psi(q),\\ \mathrm{M}_4\psi(pq) &= \mathrm{M}_2\psi(p)\mathrm{M}_3\psi(q) = \mathrm{M}\psi(p)\psi(q),\end{aligned}$$

como queríamos, onde $\mathrm{M} = \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3 \in k[\mathbf{x}]$. □

Pela Seção 1.3, temos que

$$\mathcal{R}_R(\mathbf{g}) \simeq \frac{R[\mathbf{y}]}{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \text{ e } \mathcal{R}_R(\widehat{\mathbf{g}}) \simeq \frac{R[\mathbf{y}]}{\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}}$$

são as respectivas álgebras de Rees de $\mathbf{g}$ e $\widehat{\mathbf{g}}$ e os ideais $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ e $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ são chamados de *ideais de apresentação* de $\mathcal{R}_R(\mathbf{g})$ e $\mathcal{R}_R(\widehat{\mathbf{g}})$, respectivamente. O principal resultado dessa seção é o seguinte:

Teorema 3.1.7. *Seja $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_m\} \subset R$ um conjunto de formas de mesmo grau satisfazendo as restrições canônicas e sejam $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ e $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ os ideais de apresentação de $\mathcal{R}_R(\mathbf{g})$ e $\mathcal{R}_R(\widehat{\mathbf{g}})$, respectivamente. Então,*

(a) ψ conduz $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ em $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$;

(b) Dado um polinômio bihomogêneo $q(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ tal que nenhuma variável de $k[\mathbf{x}]$ é fator de $q(\mathbf{x},\mathbf{y})$ então $q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \psi(p(\mathbf{x},\mathbf{y}))$ para algum $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ bihomogêneo . Em particular, um subconjunto finito de $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ mapeia em um conjunto minimal de geradores de $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ pela ψ;

(c) Se $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \subset \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ é o subideal gerado pela imagem de um conjunto de geradores de $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$, então $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ é um primo minimal de $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}$.

Demonstração.

(a) Seja $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$ uma forma bihomogênea tal que $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$. Então, $p(\mathbf{x},\mathbf{g}) = 0$. Pela Definição 3.1.5, temos

$$\psi(p(\mathbf{x},\mathbf{y})) = (x_0^{d_x-\beta_0} \cdots x_n^{d_x-\beta_n})^{-1} p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}).$$

Denote $h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \psi(p(\mathbf{x},\mathbf{y}))$. Assim, nosso objetivo é mostrar que $h \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$, ou seja, basta verificarmos que $h(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{g}}) = 0$. Segue do Lema 3.1.3 que $p(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{g}}) = 0$. Portanto,

$$h(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{g}}) = (x_0^{d_x-\beta_0} \cdots x_n^{d_x-\beta_n})^{-1} p(\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{g}}) = 0.$$

Logo, $h \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$, ou seja, ψ conduz $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ em $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$.

(b) Como $\widehat{\widehat{\mathbf{g}}} = \mathbf{g}$, pelo item (a), temos que $\psi(q(\mathbf{x},\mathbf{y})) \in \mathcal{J}_{\widehat{\widehat{\mathbf{g}}}} = \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$. Então, se mostrarmos que $\psi(\psi(q(\mathbf{x},\mathbf{y}))) = q(\mathbf{x},\mathbf{y})$, teremos o resultado.

Afirmação 3.1.8. $\psi(\psi(q(\mathbf{x},\mathbf{y}))) = q(\mathbf{x},\mathbf{y})$*, onde* $q(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ *está nas condições da hipótese.*

De fato, através da Definição 3.1.5 e considerando a representação de Newton de

$$q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = < \mathbf{c}(q), \mathbf{x}^{N_{\mathbf{x}}(q)}\mathbf{y}^{N_{\mathbf{y}}(q)} >,$$

é suficiente mostrarmos que $\widehat{\widehat{N_{\mathbf{x}}(q)}} = N_{\mathbf{x}}(q)$.

Por hipótese, x_i não é fator de $q(\mathbf{x},\mathbf{y})$, para todo i, (ou seja, x_i não aparece em todos os termos de $q(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Assim, para cada linha da matriz de Newton $N_{\mathbf{x}}(q)$ sempre existirá no mínimo uma coluna de tal forma que sua entrada na i-ésima coluna é nula. Exemplificando, a primeira linha da matriz $N_{\mathbf{x}}(q)$ é formada pelos expoentes da variável x_0 de cada termo de $q(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Como x_0 não aparecerá em todos os termos de $q(\mathbf{x},\mathbf{y})$, no mínimo, em um termo ela não estará. Logo, alguma dessas entradas será nula.

Então, ao calcularmos a matriz dual de $N_{\mathbf{x}}(q)$, teremos $\widehat{N_{\mathbf{x}}(q)}$ e repetindo o mesmo processo encontraremos $\widehat{\widehat{N_{\mathbf{x}}(q)}} = N_{\mathbf{x}}(q)$, onde a última igualdade segue do Lema 2.2.3 (igualdade dos vetores diretriz), ou seja, voltaremos para a matriz $N_{\mathbf{x}}(q)$, pois, ao calcularmos o primeiro dual, o máximo de cada linha da matriz $N_{\mathbf{x}}(q)$ assumirá, na matriz dual, as entradas que eram nulas na matriz anterior, e o mesmo acontecerá na matriz "dual da dual", resultando na própria matriz $N_{\mathbf{x}}(q)$. Logo, $\widehat{\widehat{N_{\mathbf{x}}(q)}} = N_{\mathbf{x}}(q)$ e a afirmação segue.

Portanto, da afirmação acima, existe elemento em $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ tal que ψ o conduz em $q(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

(c) Nesse item mostraremos a seguinte afirmação, que é algo mais forte:

Afirmação 3.1.9. *Existe um monômio $M \in k[\mathbf{x}]$ tal que $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}} \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : M)$.*

Observe que se provarmos essa afirmação teremos a igualdade $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}} = (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : \mathrm{M})$. Basta notarmos que se $a \in (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : \mathrm{M})$ então $a(\mathrm{M}) \subseteq \widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \subset \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$. Como $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ é um ideal primo e, em particular, $a\mathrm{M} \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ temos que $a \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ ou $\mathrm{M} \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$. Suponha que $\mathrm{M} \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$. Como M é um monômio em $k[\mathbf{x}]$, temos que $x_i \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$, para algum $i = 0, \ldots, n$, mas isso é um absurdo já que na construção de $\mathcal{R}_R(\widehat{\mathbf{g}})$, o homomorfismo que definimos preservava R (ou seja,

$\varphi(h(\mathbf{x},\mathbf{y})) = h(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{g}}) = x_i \neq 0$, onde $h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_i$). Assim, $a \in \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ e a igualdade segue.

Agora, provemos a afirmação. Seja $q(\mathbf{x},\mathbf{y})$ um gerador minimal bihomogêneo de $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$. Em particular, pelo item (b), existe $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ tal que $\psi(p(\mathbf{x},\mathbf{y})) = q(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Como $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ é finitamente gerado, suponha que $\mathcal{J}_{\mathbf{g}} = (p_1,\ldots,p_t)$, onde $p_i \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$, para todo $i = 1,\ldots,t$, é bihomogêneo. Então, podemos escrever

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{t} a_i p_i(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

com $a_i \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$. Assim, pelo Lema 3.1.6, existem monômios adequados M, M_1, ..., M_t tais que

$$\begin{aligned} M\psi(p(\mathbf{x},\mathbf{y})) &= M_1\psi(a_1p_1(\mathbf{x},\mathbf{y})) + \ldots + M_t\psi(a_tp_t(\mathbf{x},\mathbf{y})) \\ &= M_1M_1'\psi(a_1)\psi(p_1(\mathbf{x},\mathbf{y})) + \ldots + M_tM_t'\psi(a_t)\psi(p_t(\mathbf{x},\mathbf{y})) \\ &= h_1\psi(p_1(\mathbf{x},\mathbf{y})) + \ldots + h_t\psi(p_t(\mathbf{x},\mathbf{y})), \end{aligned}$$

onde $h_i = M_iM_i'\psi(a_i) \in \mathrm{R}[\mathbf{y}]$. Então, uma vez que $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} = (\psi(p_1),\ldots,\psi(p_t))$, temos $\mathrm{M}q(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}$. Daí, segue que $q(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathrm{M}) \subset \widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}$, onde (M) é o ideal gerado por M. Note que com o mesmo argumento mostraremos que qualquer gerador minimal de $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ estará em $(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : \mathrm{M})$. Assim, por distributividade, dada qualquer combinação dos geradores de $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$, o produto dela por qualquer múltiplo de M (sobre $k[\mathbf{x}]$) estará em $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}$ e, então , obtemos $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}} \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : \mathrm{M})$.

Agora, suponha que existe J, um ideal primo, tal que $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \subset \mathrm{J} \subset \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$. Como M não está em $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$, logo não estará em J. Assim, temos que $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}} = (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : \mathrm{M}) \subset \mathrm{J}$ e, portanto, $\mathrm{J} = \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$, ou seja, $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ é um primo minimal de $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}$. □

Exemplo 3.1.10. Seja $\mathbf{g} = \{x_1^2x_3^3, x_0x_1^3x_2, x_1x_2^3x_3, x_2^3x_3^2\} \subset \mathrm{R} = k[x_0,x_1,x_2,x_3]$. Utilizando o programa de computação algébrica [14], obtemos que $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ é minimamente gerado pelas biformas:

$$g_0 = x_3y_2 - x_1y_3, g_1 = x_2^3y_0 - x_1^2x_3y_3, g_2 = x_0x_1x_2y_0 - x_3^3y_1, g_3 = x_2^2x_3y_1 - x_0x_1^2y_2, g_4 = x_0x_1y_2^2 - x_2^2y_1y_3, g_5 = x_0x_2y_0y_2 - x_3^2y_1y_3, g_6 = x_0^2y_0y_2^4 - x_2x_3y_1^2y_3^3.$$

Note que

$$\mathrm{N}(\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\widehat{N(\mathbf{g})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\widehat{\mathbf{g}} = \{x_0x_1x_2^3, x_2^2x_3^3, x_0x_1^2x_3^2, x_0x_1^3x_3\}$$

e $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ é gerado minimamente pelas biformas:

$$g_0' = x_1y_2 - x_3y_3, g_1' = x_0x_1^2y_1 - x_2^2x_3y_2, g_2' = x_1^2x_3y_0 - x_2^3y_3, g_3' = x_3^3y_0 - x_0x_1x_2y_1, g_4' = x_1x_3^2y_0 - x_2^3y_2, g_5' = x_2^2y_2^2 - x_0x_1y_1y_3, g_6' = x_3^2y_0y_2 - x_0x_2y_1y_3, g_7' = x_2x_3y_0y_2^4 - x_0^2y_1^2y_3^3.$$

Observe que o gerador $g_4' = x_1x_3^2y_0 - x_2^3y_2$ de $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ é a imagem da biforma $x_2^3y_0 - x_1x_3^2y_2$ por ψ. De fato, considere $p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_2^3y_0 - x_1x_3^2y_2$. Logo, $d_{\mathbf{x}} = 3$ e $\beta = (0,1,3,2)^t$ é o vetor diretriz de $\mathrm{N}_{\mathbf{x}}(p)$, pois

$$\mathrm{N}_{\mathbf{x}}(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= (x_0^{3-0}x_1^{3-1}x_2^{3-3}x_3^{3-2})^{-1}p(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) \\ &= (x_0^3x_1^2x_3)^{-1}[(x_0x_1x_3)^3y_0 - (x_0x_2x_3)(x_0x_1x_2)^2y_2] \\ &= \left(\frac{1}{x_0^3x_1^2x_3}\right)[x_0^3x_1^3x_3^3y_0 - x_0^3x_2^3x_1^2x_3y_2] \\ &= x_1x_3^2y_0 - x_2^3y_2 \\ &= g_4'. \end{aligned}$$

Porém, $p(\mathbf{x},\mathbf{y})$ não é um elemento do conjunto minimal de geradores de $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ fixados acima.

Agora, verificaremos quem são os geradores do subideal $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} \subset \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$. Para isso, basta calcularmos as imagens dos geradores de $\mathcal{J}_{\mathbf{g}}$ pela ψ:

Como $g_0 = x_3y_2 - x_1y_3$, $d_{\mathbf{x}} = 1$, $\quad \mathrm{N}_{\mathbf{x}}(g_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ e $\quad \beta_0 = (0,1,0,1)^t$.

Então,

$$\begin{aligned} \psi(g_0) &= (x_0^{1-0}x_1^{1-1}x_2^{1-0}x_3^{1-1})^{-1}g_0(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{y}) \\ &= \left(\frac{1}{x_0x_2}\right)[x_0x_1x_2y_2 - x_0x_2x_3y_3] \\ &= x_1y_2 - x_3y_3 \\ &= g_0'. \end{aligned}$$

Analogamente, temos $\psi(g_1) = g_2'$, $\psi(g_2) = g_3'$, $\psi(g_3) = g_1'$, $\psi(g_4) = g_5'$, $\psi(g_5) = g_6'$, $\psi(g_6) = g_7'$.

Assim, $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} = (g_0', g_1', g_2', g_3', g_5', g_6', g_7')$. Note que $(x_1x_3)g_4' \in \widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}$. Daí, $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}} \subset (\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : x_1x_3)$ e, consequentemente, temos $(\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}} : x_1x_3) = \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$, já que $x_1x_3 \notin \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$. Portanto, $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{g}}}$ é um primo minimal de $\widetilde{\mathcal{J}_{\mathbf{g}}}$ como uma ilustração do item (c) do Teorema 3.1.7.

3.2 The Jonquières

Nesta seção apresentaremos a última aplicação do Dual complementar de Newton, a qual afirma que as aplicações de Jonquières são preservadas no dual, ou seja, o dual de uma aplicação de Jonquières ainda é Jonquières e, em seguida, finalizaremos com uma consequência desse resultado. Destacamos que no contexto do nosso trabalho essas aplicações terão um formato particular, como veremos a seguir.

Definição 3.2.1. *Um x_n-monóide é uma d-forma $f = f_d + x_n f_{d-1} \in k[x_0, \ldots, x_n]$, onde f_{d-1}, f_d são formas em $k[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ de graus $d-1$ e d, respectivamente.*

Defina $J_o(1,\mathbb{P}^n)$ como sendo o conjunto de todas aplicações Cremona da forma $(qg_0 : \ldots : qg_{n-1} : f)$, as quais chamaremos neste trabalho de Jonquières, onde $(g_0 : \ldots : g_{n-1})$ define uma aplicação Cremona de $\mathrm{H} := \{x_n = 0\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ e q, $f \in k[\mathbf{x}]$ são x_n-monóides relativamente primos com pelo menos um deles tendo x_n-grau (o grau na variável x_n) positivo. Chamamos a aplicação Cremona definida por $(g_0 : \ldots : g_{n-1})$ de *suporte* das aplicações de Jonquières. Este nome não é à toa, pois as aplicações de $J_o(1,\mathbb{P}^n)$ foram construídas a partir dela. Notemos também que as aplicações de Jonquières são de $\mathbb{P}^n$ e, por isso, a exigência de que pelo menos q ou f tenham x_n-grau positivo, caso contrário, ou seja, se f e q não tivessem x_n-grau positivo a variável x_n não apareceria nos representantes dessas aplicações o que contrariaria a definição. A grosso modo, essa exigência não permite que vejamos as aplicações de Jonquières em ambientes subjacentes a $\mathbb{P}^n$.

Lema 3.2.2. *Se f e q são x_n-monóides relativamente primos com pelo menos um deles tendo x_n-grau positivo então $\widehat{f}$ e $\widehat{q}$ também são.*

Demonstração. Analisemos três pontos:

(a) Pelo menos um deles possui x_n-grau positivo: Sem perda de generalidade, suponha que f possui x_n-grau positivo. Como f é um x_n-monóide, podemos escrevê-lo na seguinte forma:

$$f = f_d + x_n f_{d-1},$$

onde f_d e $f_{d-1} \in k[x_0, \ldots, x_{n-1}]$, $\mathrm{gr}(f_d) = d$ e $\mathrm{gr}(f_{d-1}) = d - 1$. Assim,

$$N(f) = \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} f_d \\ \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} f_{d-1} \\ \end{array} \right] \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right],$$

onde $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ representam os expoentes do fator x_n em f_d e f_{d-1}, respectivamente, de acordo com a quantidade de termos não nulos em cada. Calculando a matriz dual de N(f), temos

$$\widehat{N(f)} = \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} h_0 \\ \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} h_1 \\ \end{array} \right] \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right].$$

Logo, $\widehat{f}$ possui x_n-grau positivo, já que na última linha da matriz acima houve apenas uma troca de expoentes.

(b) $\widehat{f}$ e $\widehat{q}$ são relativamente primos: Suponha que $\widehat{f}$ e $\widehat{q}$ não são primos relativos. Então, existe uma forma $h \in k[\mathbf{x}]$ tal que $h|\widehat{f}$ e $h|\widehat{q}$. Note que h não é um monômio, caso contrário, $x_i \mid h$ para algum $i \in \{0, \dots, n\}$, e consequentemente teríamos que $x_i \mid \widehat{f}$ e $x_i \mid \widehat{q}$, o que seria um absurdo, pois $\widehat{f}$ ou $\widehat{q}$ tem x_n-grau positivo. Daí, $\widehat{f} = ha$ e $\widehat{q} = hb$, com $a, b \in k[\mathbf{x}]$. Mas, pela dualidade e o Corolário 2.2.11, temos $f = \widehat{h}\widehat{a}$ e $q = \widehat{h}\widehat{b}$, ou seja, f e q não são primos relativos. Notemos que não há possibilidade de $\widehat{h} = 1$, como vimos no Exemplo 2.1.8, pois h não é um monômio.

(c) $\widehat{f}$ e $\widehat{q}$ são x_n-monóides: Vimos em (a) que $\widehat{f} = h_1 + x_n h_0$, com h_1, $h_0 \in k[x_0, \dots, x_{n-1}]$, mas para concluirmos esta afirmação deveremos verificar se, de fato, $\mathrm{gr}(h_1) = \mathrm{gr}(h_0) + 1$. No entanto, pelo Exemplo 2.1.7, temos

$$\begin{aligned} gr(h_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - gr(f_{d-1}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - (d-1) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - d + 1 \\ &= gr(h_0) + 1, \end{aligned}$$

como queríamos. Logo, $\widehat{f}$ é um x_n-monóide. Analogamente mostra-se para $\widehat{q}$.

Portanto, o resultado está provado. $\square$

Proposição 3.2.3. *Se* $\mathfrak{F} \in J_o(1,\mathbb{P}^n)$ *então* $\widehat{\mathfrak{F}} \in J_o(1,\mathbb{P}^n)$.

Demonstração. Como $\mathfrak{F} \in J_o(1,\mathbb{P}^n)$ podemos representá-lo por $\mathbf{f} = \{qg_0, \dots, qg_{n-1}, f\}$, onde $(g_0 : \ldots : g_{n-1})$ define uma aplicação Cremona de H $\simeq \mathbb{P}^{n-1}$ e q, $f \in k[\mathbf{x}]$ são x_n-monóides relativamente primos com pelo menos um deles tendo x_n-grau positivo. Assim, nosso objetivo é mostrar que $\widehat{\mathbf{f}}$ possui o mesmo formato de $\mathbf{f}$.

Sejam $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_n)^t$, $\beta := (\beta_0, \dots, \beta_n)^t$, $\gamma := (\gamma_0, \dots, \gamma_n)^t$ e $\delta := (\delta_0, \dots, \delta_n)^t$ os vetores diretriz de N($\mathbf{f}$), N($\mathbf{g}$), N(q) e N(f), respectivamente. Pela Proposição 2.2.10 e pelo Teorema 2.2.12, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}} &= (x_0^{d-\alpha_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n})^{-1}\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}) \\ &= (x_0^{d-\alpha_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n})^{-1}\{q(\widehat{\mathbf{x}})\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}), f(\widehat{\mathbf{x}})\} \\ &= (x_0^{d-\alpha_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n})^{-1}\{(x_0^{r-\gamma_0} \cdots x_n^{r-\gamma_n})(x_0^{s-\beta_0} \cdots x_n^{s-\beta_n})\widehat{q}\,\widehat{\mathbf{g}}, (x_0^{d-\delta_0} \cdots x_n^{d-\delta_n})\widehat{f}\} \\ &= (x_0^{d-\alpha_0} \cdots x_n^{d-\alpha_n})^{-1}\{(x_0^{r+s-\gamma_0-\beta_0} \cdots x_n^{r+s-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}\,\widehat{\mathbf{g}}, (x_0^{d-\delta_0} \cdots x_n^{d-\delta_n})\widehat{f}\} \\ &= (x_0^{\alpha_0-d} \cdots x_n^{\alpha_n-d})\{(x_0^{r+s-\gamma_0-\beta_0} \cdots x_n^{r+s-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}\,\widehat{\mathbf{g}}, (x_0^{d-\delta_0} \cdots x_n^{d-\delta_n})\widehat{f}\} \\ &= \{(x_0^{r+s-d+\alpha_0-\gamma_0-\beta_0} \cdots x_n^{r+s-d+\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}\,\widehat{\mathbf{g}}, (x_0^{d-\delta_0-d+\alpha_0} \cdots x_n^{d-\delta_n-d+\alpha_n})\widehat{f}\} \\ &= \{(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0} \cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}\,\widehat{\mathbf{g}}, (x_0^{\alpha_0-\delta_0} \cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f}\}, \end{aligned}$$

onde $d = \mathrm{gr}(\mathbf{f}) = \mathrm{gr}(f)$, $s = \mathrm{gr}(\mathbf{g})$, $r = \mathrm{gr}(q)$ e $d = r + s$. Como $\mathbf{g}$ define uma aplicação Cremona de H, pelo item (b) do Corolário 2.2.16, $\widehat{\mathbf{g}}$ define uma aplicação Cremona de H $\simeq \mathbb{P}^{n-1}$. Assim, é suficiente mostrarmos que

$$(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q} \text{ e } (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f}$$

são x_n-monóides relativamente primos com pelo menos um deles tendo x_n-grau positivo.

Note que pelo Lema 3.2.2, $\widehat{f}$ e $\widehat{q}$ são x_n-monóides relativamente primos com um deles possuindo x_n-grau positivo. Então, basta analisarmos os monômios $(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})$ e $(x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})$. Note que $\beta_n = 0$, pois ele é o máximo dentre os elementos da última linha de $\mathrm{N}(\mathbf{g})$, os quais são todos nulos, pois $g_0,\ldots,g_{n-1}\in k[x_0,\ldots,x_{n-1}]$, $\alpha_n = 1$ (pois ao analisarmos $\mathrm{N}(\mathbf{f})$ perceberemos que o maior valor, dentre as entradas da última linha dessa matriz, será 1) e $\alpha_i = \max\{\gamma_i+\beta_i,\delta_i\}$, para todo $i = 0,\ldots,n$ (pois as primeiras colunas de $\mathrm{N}(\mathbf{f})$ é referente aos qg_i, com $i\in\{0,\ldots,n-1\}$ e as últimas colunas a f). Sendo assim, percebamos dois fatos:

1) $(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})$ e $(x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})$ não possuem fatores irredutíveis em comum: Tome $\mathrm{H} = (x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})$, $\mathrm{G} = (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})$ e suponha que eles possuem fatores irredutíveis em comum. Então, existe $x_i\in\{x_0,\ldots,x_n\}$ tal que $\mathrm{gr}_H(x_i) > 0$ e $\mathrm{gr}_G(x_i) > 0$. Daí, $\alpha_i-\delta_i > 0$ e $\alpha_i-\gamma_i-\beta_i > 0$. Logo, $\alpha_i > \gamma_i+\beta_i$. Como $\alpha_i = \max\{\gamma_i+\beta_i,\,\delta_i\}$, temos que $\alpha_i = \delta_i$ ou $\alpha_i = \gamma_i+\beta_i$. Mas, como $\alpha_i > \gamma_i+\beta_i$ só podemos ter $\alpha_i = \delta_i$ e, portanto, α_i - $\delta_i = 0$. Absurdo, já que $\alpha_i-\delta_i > 0$. Assim, $\mathrm{gr}_H(x_i) = 0$ ou $\mathrm{gr}_G(x_i) = 0$.

2) $(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}$ e $(x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f}$ são x_n-monóides: nosso objetivo é mostrar que eles se escrevem como na Definição 3.2.1. Sendo assim, devemos ter atenção com o fator x_n em $(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})$ e $(x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})$, já que eles só poderão ter grau igual a 1. Daí, nosso objetivo resume-se em analisar δ_n e γ_n, pois vimos anteriormente que $\alpha_n = 1$ e $\beta_n = 0$. Note que $\delta_n = 1$, pois analisando a última linha de $\mathrm{N}(f)$ teremos que o máximo, dessa linha, é igual a 1, já que f é um x_n-monóide e $\mathrm{gr}_{x_n}(f) = 1$. Analogamente, analisando $\mathrm{N}(q)$, teremos que $\gamma_n = 1$. Assim,

$$(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q} = (x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\gamma_{n-1}-\beta_{n-1}})\widehat{q}$$
$$\text{e}$$
$$(x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f} = (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\delta_{n-1}})\widehat{f},$$

ou seja, como o fator x_n desapareceu, desenvolvendo o lado direto das equações acima, conseguiremos escrevê-los como desejado.

Portanto, $(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}$ e $(x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f}$ são x_n-monóides relativamente primos com pelo menos um deles tendo x_n-grau positivo. □

Proposição 3.2.4. *Seja $\mathfrak{F}\in J_o(1,\mathbb{P}^n)$ definida pelas formas $qg_0,\ldots,qg_{n-1},f$, onde a aplicação Cremona $(g_0:\ldots:g_{n-1})$ de $H := \{x_n = 0\}\simeq\mathbb{P}^{n-1}$ é monomial e $q,f\in k[\mathbf{x}]$ são formas relativamente primos. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\mathfrak{M}\circ\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\circ\mathfrak{M}$;

(ii) $\widehat{q'} = f'$,

onde $q = q'M_q$ e $f = f'M_f$ com M_q e M_f são monômios de maior grau dividindo q e f, respectivamente.

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração notemos alguns detalhes: Pelo item (i) do Corolário 2.2.19, $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{M}$ e, pela Proposição anterior, o dual $\widehat{\mathfrak{F}}$ é definido pelo conjunto de formas

$$\{T_1\widehat{q\mathbf{g}}, T_2\widehat{f}\}, \tag{3.4}$$

onde T_1 e T_2 são monômios adequados e esta representação não possui parte fixa, já que $\mathrm{mdc}(\mathrm{T}_1\widehat{q}, \mathrm{T}_2\widehat{f}) = 1$. Por outro lado, como

$$\mathfrak{F} = \{qg_0, \dots, qg_{n-1}, f\}$$
e
$$\mathfrak{M} = \{x_1 \cdots x_n, x_0x_2 \cdots x_n, \dots, x_0x_1 \cdots x_{n-1}\}$$

temos que $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}$ admite a seguinte representação

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F} &= \{(x_1 \cdots x_n)(\mathfrak{F}), (x_0x_2 \cdots x_n)(\mathfrak{F}), \dots, (x_0x_1 \cdots x_{n-1})(\mathfrak{F})\} \\
&= \{x_1(\mathfrak{F}) \cdots x_n(\mathfrak{F}), x_0(\mathfrak{F})x_2(\mathfrak{F}) \cdots x_n(\mathfrak{F}), \dots, x_0(\mathfrak{F})x_1(\mathfrak{F}) \cdots x_{n-1}(\mathfrak{F})\} \\
&= \{q^{n-1}g_1 \cdots g_{n-1}f, q^{n-1}g_0g_2 \cdots g_{n-1}f, \dots, q^{n-1}g_0 \cdots g_{n-2}f, q^n g_0 \cdots g_{n-1}\} \\
&= \{g_1 \cdots g_{n-1}f, g_0g_2 \cdots g_{n-1}f, \dots, g_0 \cdots g_{n-2}f, qg_0 \cdots g_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Então, considerando

$$\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F} = \{g_1 \cdots g_{n-1}f, g_0g_2 \cdots g_{n-1}f, \dots, g_0 \cdots g_{n-2}f, qg_0 \cdots g_{n-1}\}, \tag{3.5}$$

podemos fazer a seguinte análise:

Seja $\mathrm{T} \in k[\mathrm{x}]$ a parte fixa da representação acima, isto é, o mdc dos seus termos. Como $\mathrm{T} \in k[\mathrm{x}]$, podemos decompô-lo em fatores irredutíveis em $k[\mathrm{x}]$, digamos $\mathrm{T} = p_1 \cdots p_k$. Tome p_i um dos fatores de T, com $i \in \{1, \dots, k\}$. Uma vez que $p_i \mid \mathrm{T}$, p_i divide todos os termos da representação 3.5. Suponha que $p_i \nmid g_l$, para todo $l = 0, \dots, n-1$. Então, $p_i | f$ e $p_i | q$, ou seja, f e q possuem fatores em comum. Porém, é um absurdo já que, por hipótese, f e q são relativamente primos. Logo, $p_i | g_l$, para algum $l = 0, \dots, n-1$. Como cada g_l é um monômio, temos que p_i é uma variável e, portanto, T é um monômio.

Agora, iniciemos a demonstração da proposição.

$(i \Rightarrow ii)$ Pela hipótese, das representações 3.4 e 3.5, temos a igualdade

$$\widehat{f}\mathrm{T}\mathrm{T}_2 = qg_0 \cdots g_{n-1},$$

a qual multiplicamos o lado esquerdo da equação por T, pois a representação 3.4 não possui parte fixa e é equivalente a representação 3.5.

Recorde que o dual de um monômio é sempre 1 (Exemplo 2.1.6). Assim, aplicando o dual na igualdade anterior, utilizando o Corolário 2.2.11 e considerando o fato de que T, T_2,

$g_0, \ldots, g_{n-1}$, M_f, M_q são monômios em $k[\mathbf{x}]$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{f}TT_2} = qg_0\widehat{\cdots g}_{n-1} &\Rightarrow \widehat{\widehat{f}}\widehat{T}\widehat{T_2} = \widehat{q}\widehat{g_0}\cdots\widehat{g_{n-1}} \\
&\Rightarrow \widehat{\widehat{f}} = \widehat{q} \\
&\Rightarrow \widehat{\widehat{f'M_f}} = \widehat{q'M_q} \\
&\Rightarrow \widehat{\widehat{f'}}\widehat{\widehat{M_f}} = \widehat{q'}\widehat{M_q} \\
&\Rightarrow \widehat{\widehat{f'}} = \widehat{q'} \\
&\Rightarrow f' = \widehat{q'} \text{ (pela dualidade)},
\end{aligned}$$

como queríamos.

$(ii \Rightarrow i)$ Notemos que as respectivas representações de $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{M}$ são equivalentes, ou seja, definem a mesma aplicação. Assim, é suficiente mostrarmos que a matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} T_1\widehat{q}h_0 & T_1\widehat{q}h_1 & \ldots & T_1\widehat{q}h_{n-1} & T_2\widehat{f} \\ fg_1\cdots g_{n-1} & fg_0g_2\cdots g_{n-1} & \ldots & fg_1\cdots g_{n-2} & qg_0\cdots g_{n-1} \end{bmatrix}$$

possui posto 1, onde $\widehat{\mathbf{g}} = \{h_0, \ldots, h_{n-1}\}$.

Seja $\mathrm{A}_{i,j}$ a submatriz 2×2 de A com i-ésimas e j-ésimas colunas $(0 \leq i < j \leq n)$ e $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)^t$ o vetor diretriz de $\mathrm{N}(\mathbf{g})$. Analisemos os dois casos seguintes:

(a) $j \leq n-1$: nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
det(A_{i,j}) &= (T_1\widehat{q}h_i)\left(f\frac{g_0\cdots g_{n-1}}{g_j}\right) - (T_1\widehat{q}h_j)\left(f\frac{g_0\cdots g_{n-1}}{g_i}\right) \\
&= \left(\frac{T_1\widehat{q}h_ifg_0\cdots g_{n-1}}{g_j}\right) - \left(\frac{T_1\widehat{q}h_jfg_0\cdots g_{n-1}}{g_i}\right) \\
&= \frac{g_iT_1\widehat{q}h_ifg_0\cdots g_{n-1} - g_jT_1\widehat{q}h_jfg_0\cdots g_{n-1}}{g_ig_j} \\
&= \frac{(g_ih_i)T_1\widehat{q}fg_0\cdots g_{n-1} - (g_jh_j)T_1\widehat{q}fg_0\cdots g_{n-1}}{g_ig_j} \\
&= \frac{(g_ih_i - g_jh_j)T_1\widehat{q}fg_0\cdots g_{n-1}}{g_ig_j} \\
&= [g_ih_i - g_jh_j]\left(\frac{T_1\widehat{q}fg_0\cdots g_{n-1}}{g_ig_j}\right) \\
&= [x_0^{\beta_0}\cdots x_n^{\beta_n} - x_0^{\beta_0}\cdots x_n^{\beta_n}]\left(\frac{T_1\widehat{q}fg_0\cdots g_{n-1}}{g_ig_j}\right) \quad \text{(pelo Lema 2.2.4)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) $j = n$: note que nesse caso $0 \leq i \leq n-1$. Assim,

$$\begin{aligned}
det(A_{i,n}) &= (T_1\widehat{q}h_i)(qg_0\cdots g_{n-1}) - (T_2\widehat{f})\left(f\frac{g_0\cdots g_{n-1}}{g_i}\right) \\
&= (T_1\widehat{q}h_iqg_0\cdots g_{n-1}) - \left(\frac{T_2\widehat{f}fg_0\cdots g_{n-1}}{g_i}\right) \\
&= \frac{g_iT_1\widehat{q}h_iqg_0\cdots g_{n-1} - T_2\widehat{f}fg_0\cdots g_{n-1}}{g_i} \\
&= \frac{(g_0\cdots g_{n-1})g_iT_1\widehat{q}h_iq - T_2\widehat{f}f}{g_i} \\
&= \left(\frac{g_0\cdots g_{n-1}}{g_i}\right)(T_1h_ig_i\widehat{q}q - T_2\widehat{f}f).
\end{aligned}$$

Daí, como

$$det(A_{i,n}) = \left(\frac{g_0\cdots g_{n-1}}{g_i}\right)(T_1h_ig_i\widehat{q}q - T_2\widehat{f}f), \tag{3.6}$$

mostraremos que $T_1h_ig_i\widehat{q}q = T_2\widehat{f}f$.

Pela Proposição 3.2.3, $\mathrm{T}_1 = x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n}$ e $\mathrm{T}_2 = x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n}$, onde $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_n)^t$, $\gamma = (\gamma_0,\ldots,\gamma_n)^t$ e $\delta = (\delta_0,\ldots,\delta_n)^t$ são os vetores diretriz de $\mathrm{N}(\mathbf{f})$, $\mathrm{N}(q)$ e $\mathrm{N}(f)$, respectivamente. Portanto, como $q = q'M_q$, $f = f'M_f$ e $\widehat{q'} = f'$ (por hipótese), temos que

$$\begin{aligned}
T_1h_ig_i\widehat{q}q &= (x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})(x_0^{\beta_0}\cdots x_n^{\beta_n})\widehat{q}q \\
&= (x_0^{\alpha_0-\gamma_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n})\widehat{q}q \\
&= (x_0^{\alpha_0-\gamma_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n})\widehat{q'M_q}q'M_q \\
&= (x_0^{\alpha_0-\gamma_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n})\widehat{q'}\widehat{M_q}q'M_q \\
&= (x_0^{\alpha_0-\gamma_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n})\widehat{q'}q'M_q \\
&= (x_0^{\alpha_0-\gamma_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\gamma_n})f'q'M_q
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_2\widehat{f}f &= (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f}f \\
&= (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f'M_f}f'M_f \\
&= (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f'}\widehat{M_f}f'M_f \\
&= (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f'}f'M_f \\
&= (x_0^{\alpha_0-\delta_0}\cdots x_n^{\alpha_n-\delta_n})q'f'M_f \ \text{ (pela dualidade).}
\end{aligned}$$

Escreva $\mathrm{M}_q = x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n}$ e $\mathrm{M}_f = x_0^{c_0}\cdots x_n^{c_n}$. Considere $\lambda = (\lambda_0,\ldots,\lambda_n)^t$ e $\theta = (\theta_0,\ldots,\theta_n)^t$ os vetores diretriz de f' e q', respectivamente, $\mathrm{N}(f') = (a_{ij})$ e $\mathrm{N}(q') = (b_{ij})$. Como $f' = \widehat{q'}$ então $\widehat{f'} = q'$. Daí,

$$\widehat{N(q')} = (\theta_i - b_{ij}) = (a_{ij})$$
$$\text{e}$$
$$\widehat{N(f')} = (\lambda_i - a_{ij}) = (b_{ij}),$$

ou seja,

$$\theta_i - b_{ij} = a_{ij}$$
$$\text{e}$$
$$\lambda_i - a_{ij} = b_{ij},$$

para todo $i = 0, \ldots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} \theta_i - b_{ij} = a_{ij} &\Rightarrow \theta_i + a_{ij} - \lambda_i = a_{ij} \\ &\Rightarrow \theta_i - \lambda_i = 0 \\ &\Rightarrow \theta_i = \lambda_i, \end{aligned}$$

para todo $i = 0, \ldots, n$. Logo, f' e q' possuem o mesmo vetor diretriz, o qual chamaremos de $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_n)^t$. Além disso, $q = \mathrm{M}_q q'$ e $f = \mathrm{M}_f f'$, então $\eta = \gamma$ - $(b_0, \ldots, b_n)$ e $\eta = \delta$ - $(c_0, \ldots, c_n)$. Assim,

$$\begin{aligned} T_1 h_i g_i \widehat{q} q &= (x_0^{\alpha_0 - \gamma_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \gamma_n}) f' q' M_q \\ &= (x_0^{\alpha_0 - \gamma_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \gamma_n})(x_0^{b_0} \cdots x_n^{b_n}) f' q' \\ &= (x_0^{\alpha_0 - \gamma_0 + b_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \gamma_n + b_n}) f' q' \\ &= (x_0^{\alpha_0 - \eta_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \eta_n}) f' q', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 \widehat{f} f &= (x_0^{\alpha_0 - \delta_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \delta_n}) q' f' M_f \\ &= (x_0^{\alpha_0 - \delta_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \delta_n})(x_0^{c_0} \cdots x_n^{c_n}) q' f' \\ &= (x_0^{\alpha_0 - \delta_0 + c_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \delta_n + c_n}) q' f' \\ &= (x_0^{\alpha_0 - \eta_0} \cdots x_n^{\alpha_n - \eta_n}) q' f', \end{aligned}$$

e, portanto, da Equação 3.6, temos $\det(\mathrm{A}_{i,n}) = 0$, como queríamos. □

Referências Bibliográficas

[1] SIMIS, A.; VILLARREAL, R. H. *Linear syzygies and birational combinatorics.* Results Math. 48 (2005), 326–343.

[2] ANDRADE, P. D. S. *Parametrizações de Jonquières.* Dissertação apresentada no programa de pós-graduação em matemática (PROMAT) da Universidade Federal de Sergipe, 2015.

[3] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, Reading, 1969.

[4] BORGES, H.; TENGAN, E. *Álgebra comutativa em 4 movimentos.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[5] COSTA, B.; SIMIS, A. *New constructions of Cremona maps.* Mathematical Research Letters, v. 20, p. 629-645, 2013.

[6] DORIA, A. V.; SIMIS, A. *The newton complementary dual revisited.* Journal of Algebra and Its Applications, v. 17, p. 1850004-16, 2017.

[7] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. *Abstract Algebra.* John Wiley Sons, Inc., 2004.

[8] FONTES, J. F. N. *Critérios de birracionalidade.* Dissertação apresentada no programa de pós-graduação em matemática (PROMAT) da Universidade Federal de Sergipe, 2014.

[9] FULTON, W. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry.* 2008. Disponível em: www.math.lsa.umich.edu/wfulton/.

[10] GUARDO, E.; TUYL, A. V. *Arithmetically Cohen-Macaulay Sets of Points in* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Springer, 2015.

[11] MACEDO, R. B. C. *Álgebras de Rees.* Dissertação apresentada no programa de pós-graduação em matemática da Universidade Federal da Paraíba, 2013.

[12] SANTANA, J. R. S. *Álgebra de Rees de Ideais.* Dissertação apresentada no programa de pós-graduação em matemática (PROMAT) da Universidade Federal de Sergipe, 2014.

[13] HASSANZADEH, S.H.; SIMIS, A. *Plane Cremona maps: saturation, regularity and fat ideals.* J. Algebra, 371 (2012), 620–652.

[14] DECKER, W.; GREUEL, G. M.; PFISTER, G.; SCHÖNEMANN, H. *Singular 4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations.* (2015), http://www.singular.unikl.de.